image

not

available

Mathesis. System: et meth: ord: chronol: 145.

R

Friedrich Meinerts
Professors der Philosophie auf der Königlichen Friedrichsuniversität

Lehrbuch der Mathematik.

Erster Theil
Gemeine und allgemeine Arithmetik.



Halle,
bei Hemmerde und Schwetschke
1789.

Seiner

Königlichen Hoheit

Friedrich Wilhelm

Kronprinzen von Preussen.

Durchlauchtigster Kronprinz,
Gnädigster Prinz
und Herr!

Eurer Königlichen Hoheit gnädigste Erlaubnis, Höchst Deroselben Namen gegenwärtigem Werke vorsezen zu dürfen, ist für mich das größte Glük.

Dem künftigen Beherrscher der Preussischen Staaten und derselben zahlreichen Armeen, kann die Bearbeitung kriegswissenschaftlicher Kenntnisse, durch deren Anwendung eine Armee ihre wahre Stärke erhält, und durch welche ihre Siege mit unsterblichem Ruhme bekrönt werden, unmöglich gleichgültig sein, da sich diese Kenntnisse, ausgeübt von Preussischen Helden, deren Thaten der Nachwelt unglaublich scheinen werden, zu einer Wissenschaft empor arbeiten.

Eurer Königlichen Hoheit bewundernswürdiges Bestreben, durch Beispiel und huldreiche Beförderung, die Kriegswissenschaften und die ausübende Kriegskunst zu vervollkommnen, hat auf die Verbreitung derselben mehr Einflus, als iede schriftliche Anpreisung.

Möchten doch alle Preussische Officiere diese Wissenschaften so beherzigen, als es ihre erhabenen Gebieter wünschen, und **Eure Königliche Hoheit** meine geringen Bemühungen zu diesem Zweke eines gnädigen Beifalls nicht ganz unwürdig finden. Ich ersterbe

Eurer Königlichen Hoheit

unterthänigster Knecht
Friedrich Meinert.

Vorerinnerung.

Gegenwärtiges Lehrbuch ist zunächst für meine militärischen Zuhörer bestimmt, welche mehrere Officiere und sämmtliche gefreite Korporale der hiesigen Garnison sind, denen ich die ersten Principia dieser Wissenschaften beim mündlichen Unterrichte in die Feder diktire. Da man beim Diktiren alles sehr kurz angeben muß: so entschloß ich mich, ein Lehrbuch über die gesammten Kriegswissenschaften zu entwerfen, welches die dazu unentbehrlichen mathematischen Kenntnisse, die ich unter dem Namen der Vorbereitungswissenschaften abhandele, ziemlich vollständig, die eigentlichen Kriegswissenschaften systematisch, und die Hülfswissenschaften im zwekmässigen Zusammensein enthielte, damit der Infanterie- und Kavallerieofficier darin ein Ganzes habe.

Die Infanterie- und Kavallerieofficiere haben Pflichten zu erfüllen, die im Wesentlichen einerlei sind. Das Mehr und Weniger einer Wissenschaft zur Erfüllung einer Pflicht, wird ieder Aufmerksame selbst zu treffen wissen. So wird sich z. B. der Infanterieofficier eine Lehre ganz eigen machen müssen, die der Kavallerieofficier nur dem Inhalte nach kennen darf,

und

und umgekehrt — aber keiner von beiden kann die Kriegswissenschaften ganz entbehren.

Von dem Nuzen der Kriegswissenschaften ist schon so viel gesagt, daß ich iede Bemerkung darüber und iede Anpreisung des Studiums derselben für überflüssig halte. Jeder Kenner kennt den Werth und Nuzen der Kriegswissenschaften, und ieder erfahrne Krieger bestätigt denselben. Wer sich davon nicht überzeugen kann, muß die Geschichte der Kriege studiren.

Sollte man den angegebenen Umfang der Kenntnisse für den Infanterie- und Kavallerieofficier zu groß finden: so muß ich auf den gegenwärtigen Zustand der ausübenden Kriegskunst verweisen, der diese Ausdehnung nothwendig macht.

Erfahrung und das Urtheil erprobter Krieger stimmen darin überein, daß die Stärke einer Armee in einem zwekmässig gebildeten Korps Officiere bestehe. Ist dieses: so ist der Nuzen der Kriegswissenschaften bewiesen.

Der Tadel trift nie das zweckmässige Studium der Kriegswissenschaften, sondern die unzwekmässigen, abgerissenen, unvollständigen Kenntnisse. Ein Officier, der etwas Arithmetik und Geometrie weiß, eine Flesche aufwerfen, und einen Plan, so obenhin aufnehmen kann, ist noch lange nicht

nicht in die Geheimnisse der eigentlichen Kriegswissenschaften eingeweiht. Dergleichen Kenntnisse, zumal wenn sie blos historisch erlernt sind, schaden oft mehr als sie nüzen. Der Officier mit diesen Kenntnissen glaubt alles gefaßt zu haben, was zu der Erfüllung seiner Pflichten nöthig ist, aber er irrt sich. Warum leistet wirklich ein Officier mit solchen Kenntnissen so wenig? Jeder schwere verwikelte Fall, der ihm zur Ausübung vorgelegt wird, macht ihn verlegen. Verursacht dies nicht der Mangel an vollständigen Principien?

Der angehende oder wirkliche Officier, dem Gelegenheit angebothen wird diese Wissenschaften zu erlernen — und dies ist ia der höchste Wille und das Bestreben, wenigstens der Preussischen Monarchen, schon lange gewesen — hat keine Entschuldigung, wenn er unwissend bleibt. Für diese Gelegenheit sorgten der Herr General von Thadden, und die Herren Kommandeurs der Füselierbatallione von Langlair und von Renouard in hiesiger Garnison, durch den mir aufgetragenen Unterricht.

Ich betrachte den Officier als ein wichtiges Glied im Staate, welches zum Besten des Ganzen mitwirken muß. Ihm wird in Feldzügen, es sei im Grossen oder Kleinen, der Kern der streitbaren Mannschaft anvertraut; aus seinen Händen aber kann der Monarch das

Blut

Blut seiner Bürger fordern, wenn es durch unkluge Anstalten — oder durch die Folge der Unwissenheit vergossen ist. — Der Officier, der die Kenntnisse besizt, die zu der Erfüllung seiner schweren Pflichten nöthig sind, und sie wirklich erfüllt, kann sichere Rechnung auf die Belohnung des Staats machen. Im Frieden genießt er Vortheile] und Vorzüge, auf welche ein Bürger des Staats, in andern Verhältnissen, keinen Anspruch machen kann. Dieses Verhältnis also allein, in welchem er im Staate lebt, muß es ihm schon zur Pflicht machen, keine angebothene Gelegenheit zu versäumen, wo er seine Kenntnisse erweitern, und sich zu noch vortheilhaftern vorbereiten kann.

Mein erstes Gesez beim mündlichen Unterrichte in den Kriegswissenschaften ist, nicht eher zu anwendbaren Theilen zu gehen, bis meine Zuhörer die Principia der Vorbereitungswissenschaften ganz gefaßt haben, und dieselben zu gebrauchen wissen. Diesem Geseze muß, wie ich glaube, ieder Lehrer in diesem Fache treu bleiben. Wer etwas weis, und das was er weis, mit keinen Gründen unterstüzen kann, weis nichts.

Da mehrere meiner Zuhörer ernstlich wünschten, den ins Kurze gezogenen Unterricht zum eigenen Studiren weiter ausgeführt zu haben: so nahm ich zugleich auch auf solche Rüksicht, die meinen Vortrag über

die

die Kriegswissenschaften nicht hören, und daher dürfte die Bogenzahl dieses Werkes etwas anwachsen. Ich würde die Vorbereitungswissenschaften von diesem Lehrbuche gänzlich ausgeschlossen haben, da wir mehrere gute Lehrbücher in diesem Fache haben, und die Principia immer die nämlichen bleiben müssen, sie mögen von diesem oder von ienem vorgetragen werden, wenn ich bei einem ieden Leser ein und dasselbe Lehrbuch als bekannt hätte voraussezen können, worauf ich mich in den folgenden Abtheilungen beziehen werde. Da dieses nicht ist: so habe ich, um das Ganze vollständig zu machen, auch die Vorbereitungswissenschaften abzuhandeln, mir vorgenommen. Mein Muster, wornach ich arbeitete, sind die Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, von Wencesl. Johann Gustav Karsten. Greifswald 1780. Ferner: die Vollständige Anleitung zur Niedern und Höhern Mathematik, von Georg Gottlieb Hahn. Stuttgard 1788. Ausser diesen habe ich die Lehrbücher eines Kästner, v. Segner, Mönnich, Lorenz u. a. da benuzt, wo sie mir zu meiner Absicht zwekmässig schienen. In den Vorbereitungslehren bin ich der Klügelschen bekannten und beliebten Encyklopädie und Eberts Näherern Unterweisung in den philosophischen und mathematischen Wissenschaften gefolgt. Die Geschichte konnte ich nur ganz kurz angeben, weil diese Abtheilung sonst noch stärker geworden wäre.

Wenn

Vorerinnerung.

Wenn es meine Lage und übrigen Umstände erlauben, so erscheint alle Messen eine Abtheilung dieses Lehrbuches.

Von den eingeschlichenen Fehlern, die mir bis iezt zu Gesichte gekommen sind, bitte ich folgende zu verbessern:

Seite 96. Zeile 6. von unten, seze man hinter d. i. 1. S. 101. Zeile 14. von unten, streiche man hinter 1,000 das Zahlzeichen 3. weg. S. 157. Zeile 1. von unten, lese man Kubikzahlen, statt Kubikwurzeln. S. 181. Zeile 14. von unten, streiche man Anm. bei §. 31. weg.

Bin ich mit meinen Bemühungen so glüklich, zur Beförderung kriegswissenschaftlicher Kenntnisse etwas beizutragen: so wird es für mich die süsseste Belohnung sein. Auch bitte ich einen ieden Kenner dieser Wissenschaften, wenn und wo ich irre, mir gegründete Einwendungen zu machen und Winke mitzutheilen, die ich nicht nur mit Vergnügen annehmen, sondern auch nach Möglichkeit zu befolgen suchen werde. Halle, im September 1789.

Inhalt.

Inhalt.

Allgemeine Vorbereitungslehren.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Die gemeine Arithmetik.

Zweiter Abschnitt.

Die allgemeine Arithmetik.

4. Allge:

Inhalt.

Allge-

Allgemeine Vorbereitungslehren.

I.

Logik oder Vernunftlehre.

Der Zwek aller Bemühungen unsers Verstandes ist, die Uebereinstimmung unserer Vorstellungen mit der wirklichen Beschaffenheit der Dinge zu erforschen, d. i. Wahrheit zu finden. Die Uebereinstimmung unserer Vorstellungen mit einander, ist das Kennzeichen der Wahrheit, so wie irgend ein Widerspruch zwischen denselben Irrthum, Unrichtigkeit anzeigt. Die Logik, oder die Vernunftlehre soll zeigen, welchen Gang der menschliche Verstand in der Erforschung der Wahrheit geht, und daraus allgemeine Regeln zur Beurtheilung des Wahren und Falschen ziehen. Durch bloße Uebung erlangen wir schon eine gewisse Fertigkeit, unsern Verstand zur Erforschung der Wahrheit zu gebrauchen, und diese nennt man natürliche Logik. Da man sich aber in allen Fällen der Regeln, nach welchen man denkt, nicht deutlich bewußt ist, folglich oft irren kann: so ist es nöthig sich mit den deutlich entwikkelten Gesezen unsers Denkens bekannt zu machen. Die Wissenschaft, in welcher diese Geseze abgehandelt werden, wird im Gegensaz jener, künstliche Logik genannt.

Hier kann diese Wissenschaft nicht in ihrem ganzen Umfange vorgetragen werden, sondern das Unentbehrlichste aus derselben, also nur diejenigen Lehren, die theils in der gegenwärtigen, theils in den folgenden Abtheilungen angewandt werden.

Unsre Seele hat Fähigkeiten, die uns die Erforschung der Wahrheit möglich machen — wir haben Kräfte, durch Hülfe gewisser Theile unsers Körpers Vorstellungen von gegenwärtigen Dingen zu erhalten, und wir sind im Stande, diese Vorstellungen eine Zeitlang fortzusezen, und uns dieselben so oft es uns gefällt wieder lebhaft zu machen, wenn auch die Dinge selbst nicht mehr gegenwärtig sind.

Aus der Vergleichung und Verbindung dieser Vorstellungen sezen wir unsre Kenntnisse und Wissenschaften zusammen. Den Zustand, wenn wir Vorstellungen von gegenwärtigen Dingen haben, die auf uns wirken, nennt man überhaupt Empfindung; woraus man leicht begreift, was die Empfindungskraft sey. Die Empfindungen sind äussere, wenn sich die Gegenstände, welche empfunden werden, ausserhalb unserer Seele befinden; innere hingegen, wenn wir etwas empfinden, das in unserer Seele selbst vorgeht. Die Kraft Begriffe fortzusezen heißt das Gedächtnis, welches dann Erinnerungskraft genannt wird, wenn wir erkennen, daß wir den nämlichen Begrif schon zu einer andern Zeit gehabt haben. Die Kraft, abwesende Dinge sich vorzustellen, als wenn sie gegenwärtig wären, wird die Einbildung, und das Vergleichen und Zusammensezen der Begriffe die Beurtheilungskraft genannt. Leztere heißt auch der Verstand oder die Vernunft.

Folgende Wirkungen des menschlichen Verstandes sind die wichtigsten: Begriffe, Urtheile oder Säze, und Schlüsse. Diese kennen zu lernen ist der Zwek der folgenden Bemerkungen. Begriffe oder Ideen entstehen durch die blossen Vorstellungen in unserer Seele; Urtheile oder Säze, wenn wir Begriffe mit einander vergleichen, und Schlüsse, wenn wir aus zwei oder mehrern Säzen, einen dritten herleiten. Man pflegt daher auch das Vermögen der Begriffe, Verstand,

das

das Vermögen der Urtheile, Urtheilskraft, und das Vermögen der Schlüsse, Vernunft zu nennen.

Von den Begriffen.

1. Die ersten Begriffe erhalten wir durch die Empfindung; alle übrigen entstehen entweder durch Theilung oder Zusammensezung, oder durch Vergleichung derselben mit einander. Die Begriffe bezeichnet man durch Worte oder durch Zeichen, oder durch beide zugleich. Man theilt sie gewöhnlich in gewisse Klassen, und zwar nach ihrem Inhalte, Erzeugungsart, und Vollkommenheit.

2. Das Wort Ding oder Sache bezeichnet überhaupt einen wirklichen Gegenstand, eine Beschaffenheit, Wirkung oder Handlung, und in diesem Sinne werden beide Wörter gleichbedeutend im Folgenden gebraucht werden.

Stellt ein Begrif ein wirkliches oder einzelnes Ding vor, das ein Individuum genannt wird: so heißt er ein Individualbegrif oder konkreter; enthält er aber etwas, das verschiedenen wirklichen Dingen zukommt, ein allgemeiner oder abstrakter Begrif. Z. B. der Name Schwerin zeigt einen Individualbegriff, das Wort Feldherr hingegen einen allgemeinen Begrif an.

3. Die allgemeinen Begriffe abstrahiren wir von den Individualbegriffen, indem wir von den Begriffen, die wir durch die Empfindung erhalten, gewisse Theile oder besondere Umstände weglassen und nur das betrachten, was alle Individualbegriffe gemein haben. So entsteht der allgemeine Begrif Feldherr durch die Abstraktion aus den Individualbegriffen, Schwerin, Winterfeld, Seidliz ꝛc.

4. Durch die Abstraktion aus allgemeinen Begriffen entstehen Begriffe, die noch allgemeiner, als die vo-

rigen sind. So entsteht z. B. aus den allgemeinen Begriffen Philosoph, Theolog, Jurist, Medicus rc. ein noch allgemeinerer Begrif Gelehrter. Zeigt ein allgemeiner Begrif die Aehnlichkeit einzelner Dinge an: so heißt er eine Art oder Species; zeigt er die Aehnlichkeit verschiedener Arten, eine Gattung, Geschlecht oder Genus. Bildet man durch Abstraktion aus Gattungen, allgemeine Begriffe; so heissen diese höhere und iene niedere Gattungen.

5. Verbindet man Begriffe, die man durch die Empfindung erhält, mit solchen, die aus Abstraktion hergeleitet werden, so entstehen eine Menge zusammengesezter Ideen, unter denen einige solche Dinge vorstellen können, die nicht wirklich sind. Z. B. aus der Zusammensezung der Idee eines geflügelten Thieres und eines Pferdes, entsteht der Begriff vom Pegasus.

6. Begriffe, welche die Sache nicht an und für sich selbst, sondern nur in Beziehung oder im Verhältnis eines andern anzeigen, nennt man relative, die übrigen aber absolute Begriffe.

Relative Begriffe sind: klein, gros; alt, iung; Wirkung und Ursache; Rechts, Links. Officier und gemeiner Soldat; Mensch, Thier rc. sind absolute Begriffe.

7. Zu der Vollkommenheit der Begriffe rechnet man Klarheit und Deutlichkeit. Wir haben einen klaren Begrif von einer Sache, sie sei eine einzelne oder allgemeine, wenn man sie von andern zu unterscheiden im Stande ist, der Name derselben mag bekannt oder unbekannt seyn. Ist man dies nicht im Stande, so ist der Begrif davon dunkel. Kann man die Unterscheidungsmerkmale zweier oder mehrerer Sachen angeben: so ist der Begrif deutlich klar, wo nicht, undeutlich klar. Z. B. wer es weis, daß der Planet Jupiter

Jupiter ein Stern sei, der wird ihn schon von der Sonne, vom Monde, auch eben so von einer Menge anderer Dinge, die keine Sterne sind, unterscheiden können: vielleicht aber ist der Begrif noch nicht hinreichend, den Jupiter von den übrigen Planeten und von den Fixsternen zu unterscheiden. Demnach kann ein klarer Begrif noch in gewisser Absicht dunkel seyn.

Beobachtet man aber z. B. eine Pflanze genau nach allen ihren Theilen, und sezt sich dadurch in den Stand, sie jedesmal wiederzufinden, so hat man einen deutlich klaren Begrif von derselben. Faßte man aber nur den Totaleindruck auf, und unterschiede sie dadurch von andern, so hätte man einen undeutlich klaren Begrif von derselben. Um die Merkmale einer Sache angeben zu können, muß man von ihnen wenigstens einen undeutlich klaren Begrif haben.

8. Wir haben viele Empfindungen, die wir nicht zergliedern können und davon haben wir schlechtweg klare Begriffe: also von Licht, Farbe, Schall, Geschmack, Geruch, Gefühl, Ausdehnung, Undurchdringlichkeit, Bewußtsein, Dasein, Einheit, Folge.

9. Die deutlichen Begriffe von einer Sache nennt man ausführlich, wenn man von den Merkmalen derselben eine deutliche Vorstellung hat: kann man den Begrif soweit zergliedern, bis man auf Merkmale kommt, die sich nicht weiter zergliedern lassen, also einfache Merkmale sind, so hat man einen vollkommen ausführlichen Begrif. Die Merkmale eines Quadrats z. B. sind vier gerade gleichgrosse Linien und vier rechte Winkel. Der Begrif gerade Linie ist einfach, also darf man nur von gleichen Grössen und von einem rechten Winkel eine deutliche Vorstellung haben, so erhält man durch die Vorstellung dieser Merk-

male einen vollkommen ausführlichen Begrif von einem Quadrate.

10. Ausser den Merkmalen einer Sache, woran man sie von allen andern, zu allen Zeiten unterscheiden kann, sind oft noch mancherlei andere Eigenschaften davon zu merken. Wer z. B. einen vollkommen ausführlichen Begrif von einem Kraise hat, kann mit Zuziehung anderer mathematischen Säze die verschiedenen Eigenschaften dieser Figur herleiten: daß alle Halbmesser eines Kraises einander gleich sein ꝛc. Je mehr Merkmale und Eigenschaften man von einem Gegenstande erkennt, es sei durch Erfahrung oder Schlüsse, destomehr nähert sich die Kenntnis der Vollständigkeit.

11. Haben wir uns einen Begrif von einer Sache durch Abstraktion gebildet, so haben wir dieienigen Merkmale aufzusuchen, woraus das Uebrige, was in dem Begriffe liegt, und daraus folgt, auf das bündigste hergeleitet werden kann. Diese Merkmale heissen wesentliche Merkmale. Die mathematischen Begriffe geben hierzu Beispiele.

12. Wenn die Merkmale nicht nur zureichen, eine Sache von allen andern, zu allen Zeiten zu unterscheiden, sondern wenn man auch weis, welche dem Geschlechte, wohin eine Art gehört, zukommen, und welches die der Art eigenthümlichen, oder wenn es eine einzelne Sache ist, welches die zufälligen sind: so hat man einen genauen und bestimmten Begrif. Wer weis, daß zu einem Quadrate vier gleiche gerade Linien als Seiten gehören, die vier rechte Winkel einschliessen, der hat von einem Quadrate überhaupt einen genauen und bestimmten Begrif.

Daß die Länge einer Seite bei einem einzelnen Quadrate vielleicht 1 Ruthe, 1 Fus, oder 1 Zoll lang ist, ist zufällig.

13. Wer

13. Wer die Merkmale einer Sache nach ihrem Zusammenhange erkennt, hat einen philosophischgenauen Begrif; wer sie aber nur nach ihrem blossen Zusammensein erkennt, einen historischgenauen.

Von den Säzen.

14. Wenn wir z. B. Dreiek und Figur mit einander vergleichen, und die Verschiedenheit oder Uebereinstimmung derselben erkennen: so entsteht ein Urtheil oder Saz. Z. B. ein Dreiek ist eine Figur. Man sieht hieraus, daß bei einem Saze drey Stüke unterschieden werden können, nämlich die beiden Begriffe, die man mit einander vergleicht, und den Begrif, welcher das Verhältnis derselben anzeigt. Derienige, den man als Hauptbegrif oder als den Gegenstand der Betrachtung ansieht, wird das Subiekt, der andre aber, den man mit dem Subiekte vergleicht, das Prädikat, und der dritte, wodurch das Verhältnis des Subiekts und Prädikats angezeigt wird, die Kopula oder das Verbindungszeichen genannt. So ist in dem vorigen Beispiele Dreiek das Subiekt, Figur das Prädikat, und das Wort ist die Kopula. Nimmt man nur zwei Theile bei einem Saze an, so rechnet man die Kopula mit zum Prädikate.

15. Im Reden und Schreiben wird des Nachdruks oder anderer Ursachen wegen, die vorige Ordnung der Theile eines Sazes bisweilen verlassen, daher man bei der Beurtheilung, wenn man das Subiekt sucht, mehr auf den Zweck des Redenden oder Schreibenden, als auf die Stellung der Worte sehen muß, weil nicht die zuerst gesagte oder geschriebene, sondern die zuerst gedachte Idee das Subiekt ist. Z. B. ein guter Schriftsteller von der Befestigungswissenschaft ist Vauban. Hier ist der Name Vauban das Subiekt,

und der Ausdruk ein guter Schriftsteller das Prädikat.

Oft wird ein Saz durch weniger als drei Worte ausgedrükt, obgleich zu einem ieden Saze die angegebenen drei Theile gehören, und in manchen Fällen kann sogar die Sprache durch ein Wort alle drei Theile eines Sazes zusammen ausdrüken. Z. B. die Seele denkt, ist soviel als, die Seele ist dasienige, welches denkt. Das Wort Ländereroberer drükt einen ganzen Saz aus.

16. Sind in einem Saze die Begriffe mit einander verbunden, so heißt er bejahend; sind sie aber von einander getrennt, verneinend. Z. B. das Blei ist schwer, ist ein bejahender; das Blei ist nicht schwer, ein verneinender Saz. Soll also der Saz verneinend sein, so muß die Verneinung zur Kopula gehören; denn wenn sie zum Subiekte oder Prädikate gehörte, so kann der Saz selbst beiahend sein, in welchem Falle er infinit genannt wird. Z. B. wer die Pflichten seines Berufs nicht erfüllt ist ein schlechter Mensch. Die Bestimmung eines Sazes, ob er bejahend oder verneinend sey, nennt man seine Qualität.

17. In einem bejahenden Saze wird entweder das Prädikat von allen Sachen, die durch das Obiekt angezeigt werden, oder nur von einigen behauptet, und so wird in den verneinenden Säzen das Prädikat allen Sachen, die das Subiekt anzeigt, oder nur einigen abgesprochen. Dieienigen, in welchen von allen etwas beiaht oder verneint wird, heissen allgemeine; dieienigen aber, wo nur von einigen die Rede ist, besondere Säze.

Zu den allgemeinen gehören folgende:

Alle Soldaten sind verbunden ihren Eid der Treue zu halten.

Kein eidbrüchiger Soldat ist ein rechtschaffener Mann.

Zu den besondern aber diese:

Einige Officiere haben gründliche Kenntnisse der Kriegswissenschaften; einige Befestigungsmaximen sind nicht anwendbar.

Diese Beschaffenheit der Säze heißt ihre Quantität.

18. Zeigt in einem Saze das Subiekt ein Individuum an, so heißt der Saz ein Individualsaz. Z. B. Friedrich II. war ein grosser Geist. Diese Säze werden, weil das Prädikat dem Subiekte ohne Einschränkung beigelegt wird, den allgemeinen Säzen gleich geachtet (17.).

19. Zwei Säze nennt man kontradiktorisch oder widersprechend, wenn der eine den andern für falsch erklärt, also einer den andern aufhebt. Z. B. 4 ist gleich 4. 4 ist nicht gleich 4. Von diesen Säzen kann daher nur einer wahr, aber auch nur einer falsch sein. Zwei Säze, die beide falsch, aber nicht beide wahr sein können, heissen konträr oder widerstreitend. Z. B. alle Linien sind gerade; keine Linie ist gerade.

20. Werden zwei Säze so mit einander verbunden, daß der eine die Bedingung enthält, unter welcher der andere für wahr angenommen werden kann: so heißt der zusammengesezte Saz ein bedingter oder hypothetischer Saz. Der Theil des zusammengesezten Sazes, welcher die Bedingung enthält, wird das Antecedens, und der übrige Theil das Konsequens genannt. Z. B. wenn die Kenntnis des Terrains einem Feldherrn zu den Kriegsoperationen nöthig ist, so muß er sich dieselbe zu verschaffen suchen. Die hypothetischen Säze binden also die Beiahung oder Verneinung an eine Bedingung (Hypothese); unbeding=

dingte oder kategorische Säze beiahen oder verneinen nur schlechtweg. Z. B. die Kenntnis des Terrain's ist einem Feldherrn zu den Kriegsoperationen nöthig.

21. Sind in einem Saze zwei oder mehr Prädikate, und es kann nur eins davon dem Subiekte beigelegt werden: so ist ein solcher Saz ein disiunktiver. Z. B. Festungen sind einem Lande entweder nüzlich oder schädlich, oder keins von beiden. Gilt ein Saz aber von allen Theilen des Subiekts oder des Prädikats, so heißt er ein kopulativer Saz. Z. B. Pflanzen und Thiere machen das Organisationsreich aus.

22. Die mathematischen Säze werden in theoretische und praktische eingetheilt. Ein theoretischer Saz zeigt blos an, daß eine Sache so und nicht anders beschaffen sei; ein praktischer hingegen verlangt, daß etwas zu Stande gebracht werden soll. Demnach ist der Saz: alle rechte Winkel sind einander gleich, ein theoretischer; eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen, ein praktischer Saz. Ist ein theoretischer Saz so beschaffen, daß die blosse Vorstellung des Subiekts und Prädikats hinreicht, die Uebereinstimmung oder den Widerspruch einzusehen, so heißt er ein Grundsaz, und zwar ein Axiom im besondern Sinne, wenn der Saz theoretisch, ein Postulat aber, oder Forderungssaz, wenn er praktisch ist. — Mathematische Axiome sind folgende Säze: Jede Grösse ist sich selbst gleich; das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich ꝛc. Postulirte Säze: Eine Grösse, um so viel man will, zu vermehren oder zu vermindern. Von einem gegebenen Punkte bis zu einem andern eine gerade Linie zu ziehen ꝛc. In diesem strengen Sinne sind die in der Arithmetik angeführten Forderungssäze eigentlich keine, sondern Aufgaben. Weil diese Aufgaben aber ohne weitern Unterricht von einem ieden aufgelöset werden können,

nen, der nur einige Kenntnisse von unserm Zahlensysteme hat: so zählt man diese Säze gewöhnlich unter die Forderungssäze.

Ein Erfahrungssaz beruht auf dem Zeugnisse der Sinne; z. B. der weisse Sonnenstrahl ist aus gefärbten Strahlen zusammengesezt. Eben so ist auch iedes Wiedererkennen einer Sache ein Urtheil, welches zu den Erfahrungssäzen gerechnet werden kann.

Ein willkührlicher Saz ist ein ohne Beweis angenommener, wie z. B. man zählt von 1 auf 10; ein Lehnsaz (Lemma) aber, dessen Beweis an einem andern Orte gegeben worden.

Ein Lehrsaz (Theorem) ist ein Saz, der zwar eine Wahrheit enthält, wovon man sich aber aus andern Gründen überzeugen muß: also gehören die Lehrsäze zu den theoretischen. Eine Frage oder eine Aufgabe (Problem) hat nur zwei Begriffe, wovon der eine allemal eine Handlung ist. Z. B. eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen; eine Höhe zu messen; ein Quarree zu formiren. Die Auflösung ist die Antwort auf die Frage, und zeigt das Verfahren, welches man beobachten muß, um das Verlangte zu finden oder hervorzubringen; die dazu nöthigen Stüke werden die Data genannt, und die Zusammensezung der Theile des Begrifs zu einem Ganzen, heißt die Konstruktion. Der Beweis enthält die Gründe von der Richtigkeit des Verfahrens.

Die Aufgaben selbst sind zweierlei, nämlich theoretische und praktische. Der Gegenstand einer theoretischen Aufgabe ist die Bestimmung eines Verhältnisses, einer Eigenschaft, Ursache, Wirkung, Folge. Z. B. das Verhältnis des Durchmessers eines Kraises zum Umfange zu finden. Eine praktische Aufgabe führt allemal auf eine Verrichtung, z. B. das vierte Glied in einer geome-

geometrischen Proportion zu finden. Die theoretischen Aufgaben lassen sich in Lehrsäze verwandeln.

Die hiehergehörige Auflösungskunst ist ein Zweig der mathematischen Erfindungskunst, welche nicht durch Unterricht erlernt werden kann. Es werden dazu natürliche Anlage, genaues Studium und scharfe Aufmerksamkeit erfordert. Wer diese zusammen verbindet, kann sich dieselbe selbst erwerben. Ein Zusaz (Folgerung, Corollarium) heißt ein Saz, der aus einem unmittelbar vorher vorgetragenen Lehrsaze, oder einer Aufgabe ohne Beweis folgt. Anmerkungen (Scholien) werden dieienigen Säze genannt, die nichts Wesentliches von den abzuhandelnden Sachen enthalten, sondern nur der Erläuterung oder literarischer Notiz wegen, hinzugesezt werden. Die Anmerkungen können nach Verschiedenheit der Absicht wieder in Klassen getheilt werden. Ein Saz, in welchem das Subiekt mit dem Prädikate einerlei ist, heißt ein identischer Saz, wenn auch beide durch verschiedene Wörter oder Zeichen bezeichnet werden. Solche Säze kommen in der Mathematik sehr oft vor. Z. B. $4 = 4$, auch $4 = 3 + 1$ 2c.

Von den Definitionen.

23. Jeder identische Saz, in welchem das Prädikat dieienigen Begriffe enthält, die zusammengenommen das Subiekt ausmachen, also hinreichend sind, dasselbe von allen andern Sachen zu unterscheiden, ist eine Erklärung oder Definition.

24. Die Erklärungen werden in Worterklärungen (Nominaldefinitionen), und Sacherklärungen (Realdefinitionen) eingetheilt. In der Mathematik ist eine Sacherklärung eine solche, aus welcher sich begreifen läßt, wie eine Sache möglich sei. Alle andern heissen Worterklärungen. So ist z. B. die Erklärung, der

Krais

Krais ist eine Ebene, deren Umfang überall vom Mittelpunkte gleichweit entfernt ist, eine Worterklärung; hingegen: wenn sich eine gerade Linie auf einer ebenen Fläche um einen festen Punkt in gleicher Entfernung bewegt, so entsteht ein Krais, ist eine Sacherklärung. In andern Wissenschaften heißt eine Erklärung eine Worterklärung, wenn sie unsern Begrif, eine Sacherklärung, wenn sie die Sache erklärt. Man bemerke folgende Regeln für die Erklärungen:

1) Man muß sich nur solcher Wörter bedienen, die allgemein verständlich, oder im Vorhergehenden schon erklärt sind.
2) Man muß die Wörter nicht blos übersezen, oder einen Begriff durch gleichbedeutende Wörter erklären. Z. B. Multipliciren heißt, vervielfältigen ꝛc.
3) Eine gute Erklärung muß nicht zu weitläuftig, aber auch nicht zu kurz sein d. i. sie muß nicht mehr oder weniger Merkmale enthalten, als zur vollständigen Kenntnis einer Sache nöthig sind.
4) Die Merkmale einer Sache, die in einer Erklärung vorkommen, müssen wesentliche Merkmale sein.
5) Man muß in derselben keinen Cirkel machen, d. i. die Vorstellung des Prädikats muß das Subjekt deutlicher machen. Was nüzte z. B. folgende Erklärung? Ein Rubel ist eine Russische Silbermünze, die 10 Grieven gilt; eine Grieve 10 Copeken; ein Copeken ist der 100ste Theil eines Rubels.

25. Diejenigen Sacherklärungen, aus welchen sich die Entstehungsart einer Sache begreifen läßt, werden auch genetische Definitionen genannt. Wenn sie in der Mathematik gebraucht werden, so müssen sie nicht nur die Dinge enthalten, die zur Möglichkeit einer Sache gehören, sondern auch das Verhältnis derselben. Hierher gehört die Erklärung vom Schiespulver ꝛc.

26. Kann man von einer Sache nur so viele Merkmale angeben, als hinreichen, sie zu irgend einer Absicht von andern zu unterscheiden, so hat man eine Beschreibung

bung (Description). In dem gemeinen Leben kommen sie häufig vor. In Stekbriefen ꝛc.

Von den Eintheilungen.

Ein Saz, in welchem das Prädikat alle Species von dem Subiekte enthält, wird eine logische Eintheilung (Division) genannt. Die gemeine Eintheilung zeigt nur eine Zergliederung des Ganzen in seine Theile an. So ist z. B. die Eintheilung des Menschen in Körper und Geist eine gemeine; die Eintheilung der Menschen aber, in männliche und weibliche Personen, eine logische.

28. Das Ganze, welches eingetheilt wird, heißt das Divisum, oder das Eingetheilte, die Theile aber, welche das Ganze ausmachen, werden die Theilungsglieder genannt. Das Merkmal, wodurch man erkennt, daß die Glieder disiunktive Säze sind (21.), heißt der Eintheilungsgrund. Z. B. die Dreieke sind entweder rechtwinkelig, oder schiefwinkelig. Dreiek ist das Divisum; rechtwinkelig und schiefwinkelig die Eintheilungsglieder; die Beschaffenheit der Winkel aber, der Eintheilungsgrund.

29. Wenn ein Ganzes aus mehrern Gründen eingetheilt wird, so entstehen Nebeneintheilungen, und wenn die Glieder wieder eingetheilt werden Unterabtheilungen. Eine zusammenhängende Reihe von Eintheilungen eines Ganzen heißt eine Tabelle. Z. B. die Befestigungswissenschaft theilt man nach dem Gebrauche in Festungsbau- und Verschanzungswissenschaft, also sind diese Eintheilungen Nebeneintheilungen. Theilt man ferner die Festungsbauwissenschaft in Grosse und Kleine, die Verschanzungswissenschaft aber in Einzelne und Verbundene, so erhält man Unterabtheilungen. Sezt man

man die Eintheilung fort, so bekommt man zulezt eine Tabelle.

30. Die logischen Eintheilungen erfordern folgende allgemeine Regeln:

1) Alle Glieder zusammengenommen, müssen das Ganze des Begrifs, welcher der Eintheilung zum Grunde gelegt ist, ausmachen. So machen z. B. Festungsbau- und Verschanzungswissenschaft die Befestigungswissenschaft aus.

2) Der allgemeine Begrif des Ganzen muß in allen Gliedern enthalten sein. So ist z. B. der Begrif Befestigung in Festungsbau- und Verschanzungswissenschaft enthalten.

3) Der allgemeine Begrif muß mehrere Vorstellungen enthalten, als der Begrif eines ieden Eintheilungsgliedes. Der Begrif Befestigungswissenschaft z. B. faßt mehr Vorstellungen in sich, als der Begrif Verschanzungswissenschaft.

4) Die Theilungsglieder müssen nicht in einander enthalten, sondern verschieden sein, also disiunktive Säze enthalten. So kann man Z. B. die Verschanzungswissenschaft nicht nach der Grösse der Verschanzungen eintheilen.

5) Die Eintheilungsglieder müssen zu einem Ganzen zusammenstimmen.

6) Der Eintheilungsgrund muß wichtig sein, damit man nicht zu viel und nicht zu wenig Eintheilungen erhalte. So würde man in der Artilleriewissenschaft zu wenig Eintheilungen des Geschüzes erhalten, wenn man es in eisernes und metallnes; zu viel hingegen, wenn man es nach den äussern Verzierungen oder darauf befindlichen Devisen eintheilen wollte. In beiden Fällen ist der Eintheilungsgrund zu unwichtig.

Von den Schlüssen.

31. Wenn man Säze mit einander vergleicht, und die Uebereinstimmung oder den Widerspruch zweier mit einem dritten, oder mit mehrern dadurch erkennt, so macht man einen Schlus. Z. B. eine bleierne Kugel ist schwer. Jedes Vergehen gegen die Subordination macht den Soldaten strafbar, weil es gegen die Pflichten des Dienstes ist. Genauer entwikelt heißt der Schlus so:

1) Jeder

1) Jeder feste Körper ist schwer;
2) Eine bleierne Kugel ist ein fester Körper;
3) Also ist eine bleierne Kugel schwer.

Oder:

1) Alles, was gegen die Pflichten des Dienstes ist, macht den Soldaten strafbar;
2) Jedes Vergehen gegen die Subordination ist gegen die Pflichten des Dienstes;
3) Also macht iedes Vergehen gegen die Subordination den Soldaten strafbar.

Diese Schlüsse sind förmliche Schlüsse oder Syllogismen, in welchen der erste Saz der Obersaz, der zweite der Untersaz, beide die Vordersäze (Prämissen), der dritte der Schlussaz, (Konklusion) heissen. Die Verbindung der Konklusion mit den Prämissen wird die Konsequenz genannt.

32. Zu einem ieden Vernunftschlusse werden also drei Begriffe erfordert: 1) der Gegenstand, welcher verglichen wird; 2) das Merkmal, welches mit diesem Gegenstande verglichen wird; 3) das Zwischenmerkmal, durch welches man die richtige Beziehung im Schlussaze einsieht, oder der Mittelbegrif. Aus der Stellung des Mittelbegrifs in den Vordersäzen hat man die Veranlassung genommen die Syllogismen in vier Klassen oder Figuren einzutheilen. In ieder Figur giebt es mehrere Schlusarten, die auf der Qualität und Quantität der Vordersäze beruhen.

33. Nach der ersten Figur schließt man vom Allgemeinen auf das Untergeordnete. Z. B.

Alle Wissenschaften, welche den Verstand schärfen, sind iedem Officier nüzlich;
Die Mathematik ist eine Wissenschaft, welche den Verstand schärft;
Also ist die Mathematik einem ieden Officier nüzlich.

Oder:

Oder:

a = b	$8 = \not 6 + \not 2$
b = c	$\not 6 + \not 2 = 7 + 1$
a = c	$\not 8 = 7 + 1$

Die verkürzte Form des lezten Beispiels läßt sich wörtlich so ausdrüken: Zwei Grössen, also auch zwei Zahlen, die einer dritten gleich sind, sind einander selbst gleich. In der Geometrie kommt die erste Figur beständig vor.

34. Die zweite Figur leugnet die Subiekte der Vordersäze von einander, weil sie in den Eigenschaften verschieden sind. Man braucht sie in dem Falle, wenn zwei Gegenstände nicht verwechselt werden sollen. Z. B.

In einem ieden Dreieke kann nicht mehr als ein rechter Winkel sein,
In dieser Figur giebt es vier rechte Winkel,
Also ist diese Figur kein Dreiek.

35. Die dritte Figur giebt theils Beispiele, theils Ausnahmen von allgemein scheinenden Säzen. Z. B.

1. Alle Viereke sind Figuren
Einige Viereke sind Parallelogramme,
Also sind einige Figuren Parallelogramme.

Oder:

2. Keine Wallfische sind Fische,
Alle Wallfische sind Wasserthiere mit Schwimmflossen,
Also sind einige Wasserthiere mit Schwimmflossen keine Fische.

36. Die vierte Figur findet entweder Arten zu der Gattung oder zeigt, daß ein gewisses Merkmal nichts Charakteristisches einer Art sei, oder leugnet die Art von dem, was von der Gattung geleugnet wird. Z. B.

1. Jedes Dreiek ist von allen Seiten begränzt,
Was von allen Seiten begränzt ist, ist eine Figur,
Also sind einige Figuren Dreieke, oder Dreiek ist eine Art der Figuren.

2. Einige rechtwinkelige Dreieke haben zwei gleiche Seiten,
   Jedes Dreiek mit zwei gleichen Seiten ist gleichschenkelig,
   Also sind einige gleichschenkelige Dreieke rechtwinkelig.
3. Alle Parallelogramme haben gleiche und parallele gegenüberstehende Seiten,
   Keine Figur, die gleiche und parallele gegenüberstehende Seiten hat, ist ein Trapezium,
   Also ist kein Trapezium ein Parallelogramm.

37. Die erste Figur ist die natürlichste, daher auch die zweite, dritte und vierte meist übergang werden. Man kann sie indes in Schlüsse der ersten Figur verwandeln.

Aristoteles, der Erfinder der Syllogistik, hat die vierte Figur nicht.

38. Die Hauptregel bei den Syllogismen ist kurz diese, daß der Mittelbegrif in beiden Vordersäzen genau derselbe sein muß.

39. Im gemeinen Leben und in Schriften bedient man sich der verkürzten Form. Uebrigens ist der Nuzen der Syllogismen sehr eingeschränkt, ob sie gleich mit der Natur unserer Denkkraft übereinkommen.

40. Wenn ein Prädikat einer Gattung um deswillen beigelegt wird, weil es von allen Arten gilt, oder wenn man es einer Art zuschreibt, weil es bei iedem einzelnen Dinge, die unter dieser Art begriffen sind, antrift: so nennt man einen solchen Schlus eine Induktion. Hat man alle Fälle durchgegangen, so ist die Induktion richtig und vollständig.

Z. B. $2^2 : 4^2 = 3^2 : 6^2$
$2^3 : 4^3 = 3^3 : 6^3$
$2^4 : 4^4 = 3^4 : 6^4$
also $2^n : 4^n = 3^n : 6^n$ ꝛc.

41. Wenn man zeigt, daß alle Fälle eines bedingten Sazes zu verneinen sind, so heißt die Art zu schliessen ein Dilemma oder ein gehörnter Schlus.

42. Die Kettenschlüsse (Sorites) bestehen aus einer Reihe von Säzen, in welchen allemal das Prädikat des vorhergehenden zum Subiekte des folgenden Sazes gebraucht wird.

Von den Beweisen.

43. Beweisen ist nichts anders, als die Verbindung und Uebereinstimmung oder den Widerspruch eines Sazes mit andern wahren Säzen zeigen. Oft kann man einen Saz durch einen einzigen Schlus beweisen; in andern Fällen wird auch wohl eine ganze Reihe von Schlüssen dazu erfordert. Ungeübten machen zusammengesezte Beweise die meiste Schwierigkeit. Einen Saz zu beweisen, muß man Schritt vor Schritt gehen, ieden einzelnen Saz, woraus die ganze Schlusskette besteht, muß man deutlich als wahr erkennen, auch muß man den Zusammenhang aller deutlich einsehen, und den Einflus auf dem Schlussaz gleichsam fühlen können. Ist der Beweis so beschaffen, daß sich das Gegentheil von dem bewiesenen Saze unmöglich denken läßt, so wird er apodiktisch oder eine Demonstration genannt. In den mathematischen Wissenschaften müssen die Beweise apodiktische oder Demonstrationen sein.

44. Ist der Beweis aus Erklärungen und allgemeinen Begriffen zusammengesezt, so heißt er ein Beweis a priori. Nimmt man hingegen die Erfahrung zu Hülfe, so beweiset man a posteriori. So ist der Beweis des Sazes: Alle rechte Winkel sind einander gleich, a priori; der Beweis von dem Dasein Gottes, aus der Ordnung und Einrichtung des Weltgebäudes, ist ein Beweis a posteriori.

45. Die Beweise werden in direkte und indirekte eingetheilt. Direkte beweist man, wenn die Wahrheit eines Sazes unmittelbar aus wahren Gründen abgeleitet wird. Beispiele davon sind die in 44. Indirekte aber, wenn die Falschheit des kontradiktorisch entgegengesezten Sazes dargethan, und also durch eine unmittelbare Folge auf die Wahrheit des andern geschlossen wird; daher muß man zulezt auf einen Saz kommen, der offenbar falsch ist. Beispiele davon kommen in der Geometrie vor. Alle direkte Beweise werden daher aus Einsicht der Gründe; alle indirekte aber nur aus den falschen Folgen des Gegentheils geführt.

46. Die Säze, aus welchen die Wahrheit eines Urtheils erkannt wird, heissen Beweisgründe, und derienige Beweisgrund, aus welchem die übrigen entweder abgeleitet werden, oder doch ihre Stärke erhalten, ist der Hauptgrund.

47. Die Schlüsse eines zusammengesezten Beweises sind entweder so verbunden, daß der folgende den Grund des vorhergehenden, oder der vorhergehende den Grund des folgenden enthält. Nach der ersten Art ist daher in einem Schlusse eine Prämisse des Vorhergehenden Konklusion; nach der andern aber, die Konklusion des Vorhergehenden Prämisse. Ein Beweis, der aus Schlüssen von der ersten Art besteht, wo man also zu den Gründen hinaufsteigt, oder den Saz, der bewiesen werden soll, als wahr annimmt, und die Gründe, woraus die Wahrheit desselben folgt, erforscht, heißt ein analytischer Beweis. Besteht der Beweis aus Schlüssen von der andern Art, wo man zu den Folgen hinabgeht, so ist er ein synthetischer Beweis. Die synthetischen Beweise kommen in der Geometrie, die analytischen aber in der Algebra oder Analysis vor.

48.

48. Beim Beweisen kommen folgende Regeln vor:

1) Man muß zuerst den Saz festsezen, der eigentlich bewiesen werden soll, damit man nicht beweise, was nicht bewiesen werden soll.

2) Zu den Prämissen derienigen Schlüsse, aus denen man seinen Beweis zusammensezen will, muß man keine andern Säze nehmen, als schlechtweg klare, oder solche, die schon im Vorhergehenden bewiesen sind, weil man sonst leicht eine unrichtige Konklusion erhält.

49. Beweiset man einen Saz aus einem andern, und diesen wieder aus dem ersten, so macht man einen Cirkel im Beweisen.

Von der Gewisheit oder Wissenschaft.

50. Durch das Wort Wahrheit versteht man die Uebereinstimmung der Folgen zu dem Begriffe als einem Grunde. Ein ieder Begrif aber ist ein Grund von mancherlei Folgen oder Merkmalen, die zu ihm nothwendig zusammenstimmen müssen, und ie mehr also Folgen aus einem Begriffe hergeleitet werden können, desto grösser ist daher die Wahrheit der Erkenntnis. Der Wahrheit steht der Irrthum entgegen; die gewöhnlichste Ursach desselben ist Mangel an deutlichen und vollständigen Begriffen.

51. Hat man eine lebhafte Vorstellung der Uebereinstimmung unserer Vorstellungen unter einander, so ist man überzeugt. Ist die Uebersicht allrr Säze, worauf eine Wahrheit gegründet ist, deutlich, und das Gegentheil davon enthält eine Unmöglichkeit, so hat man insbesondere mathematische Gewisheit oder Evidenz, das sicherste Merkmal der Wahrheit. Die Säze der Geometrie haben mathematische Gewisheit.

z. B. in iedem geradelinigen Dreieke ist die Summe aller Winkel zwei rechten gleich.

Ist von einem Saze das Gegentheil an sich betrachtet zwar möglich, aber keine vernünftige Ursach vorhanden, es für wahr zu halten, so heißt die Gewisheit moralisch. Die Entwikelung der moralischen Gewisheit gehört in die Moral. Man unterscheidet auch noch die historische Gewisheit von iener, welche in der lebhaften Uebereinstimmung von dem nothwendigen Zusammenhange einer Begebenheit mit allen gleichzeitigen, vorhergegangenen und nachfolgenden besteht. So ist z. B. der Saz historisch gewis: Friedrich der II. König von Preussen behauptete sich im siebeniährigen Kriege gegen die vereinigten Mächte von halb Europa.

52. Die Leichtgläubigkeit hat mehrere Quellen, Mangel an Grundsäzen und Einsichten — Zärtlichkeit des Nervensystems ꝛc. Hartgläubigkeit entsteht aus Mangel der Einsicht. Man zweifelt an der Gewisheit, wenn die Gründe für die Wahrheit eines Sazes so stark, als gegen dieselbe sind. Oft zweifelt man aus Misverstand, und dann muß man den bezweifelten Saz, oder das bezweifelte System erst völlig kennen lernen.

Wer Zweifel erregt, muß seine Kräfte prüfen, und mit allen nöthigen Kenntnissen versehen sein. In der Mathematik sind die Zweifel leicht zu heben. Wer wenig Kenntnisse hat, für den ist die Zweifelsucht verderblich.

53. Manche Wissenschaften beruhen auf historischer, andere auf moralischer, und noch andere auf mathematischer Gewisheit.

Im gemeinen Leben, so wie in Wissenschaften, kommen oft Säze vor, von welchen sich keine völlige Gewisheit erlangen läßt. Die Gründe für die Gewisheit lassen dann, wo nicht eine Furcht, doch eine Möglichkeit des Gegentheils zu. So haben wir z. B. von der Natur des

Nord-

Nordlichts — von der Natur der Sonne ꝛc. keine völlige Gewisheit. Jede Erkenntnis von der Art ist wahrscheinliche Erkenntnis. Der Gegenstand derselben ist entweder gegenwärtig, oder künftig, oder vergangen. In manchen Fällen verwandelt sich die Wahrscheinlichkeit in Gewisheit, wie z. B. in der Astronomie; in andern Wissenschaften hat die Wahrscheinlichkeit Grade nach Maasgabe der deutlichen Erkenntnis. Z. B. in der Medicin, Meteorologie, Politik ꝛc.

Die Wahrscheinlichkeit der Fälle beim Würfel- und Kartenspiel, Lotterie ꝛc. beruht auf der Herrechnung aller gleich möglichen Arten des Ereignisses. Oder man sucht das Verhältnis der möglichen Fälle durch Erfahrung, wie bei Assekuranzen oder der wahrscheinlichen Dauer des Lebens einer Person von gegebenem Alter.

54. Stehen unsere Kenntnisse in einer solchen Verbindung, daß sie ein Ganzes ausmachen, so sind sie systematische, gelehrte Kenntnisse. Eine systematische Kenntnis aus Grundsäzen, heißt ein System oder eine Wissenschaft, welchen Namen die Mathematik vor andern verdient.

Eine reine Wissenschaft enthält blos solche Wahrheiten, die auf unmittelbar klaren Säzen beruhen. Eine solche Wissenschaft ist die Mathematik, in so fern sie die Grösse in abstrakto betrachtet. Müssen wir Erfahrungen zu Hülfe nehmen, so ist die Wissenschaft gemischt. Eine solche Wissenschaft heißt auch angewandt, weil sie nicht ohne eine reine Wissenschaft möglich ist. Z. B. Optik, Astronomie ꝛc.

Von der Methode und der Lehrart.

55. Die Ordnung im Denken, welche die Vernunft durch ihre eigenen Principien bestimmt, heißt überhaupt Methode. Manier hingegen ist die Ordnung im Den-

Denken, welche nach Erfahrungsregeln bestimmt wird. Das Studium der Mathematik, und vorzüglich der Geometrie, befördert nicht nur das Denken, sondern zwingt gleichsam den Verstand mit Ordnung zu denken.

56. Die Ordnung, in welcher man seine Kenntnisse vorträgt, heißt die Lehrart oder Lehrmethode. Bei der Eintheilung der Methode sieht man entweder auf die Ordnung der Gedanken, oder auf das Subiekt oder auf das Obiekt oder endlich auf den Endzwek. Der Ordnung nach theilt man sie in die synthetische, analytische und gemischte. Nach der synthetischen (zusammengesezten) fängt man von den Gründen an, und steigt zu den Folgen herab; nach der analytischen (auflösenden) Lehrart wählt man die der vorigen entgegengesezte Ordnung, d. i. man fängt von den Folgen an und steigt zu den Gründen hinauf.

Dem Subiekte nach wird sie in die scientivische und populäre getheilt. Dem Obiekte nach ist die Methode sehr verschieden. Will man z. B. dem Gedächtnisse des Andern eine Menge Data übergeben und ihn zum Urtheilen vorbereiten, so hat man dazu die historische; Will man ihm aber selbst ein System von Kenntnissen und die Beurtheilung aller Theile beibringen, so hat man die wissenschaftliche Methode.

57. In neuern Zeiten ist der Name der mathematischen Lehrart bekannt geworden, die keine andere als die synthetische Methode ist, nur daß sie in der Mathematik auf eine eigenthümliche Art angewandt werden kann. Die Mathematiker fangen ihre Wissenschaft mit Erklärungen an, und handeln von keiner Sache, wovon sie keine deutliche Begriffe haben. Nach den Erklärungen folgen die Grundsäze und Forderungen, die keines Beweises bedürfen. Hierauf folgen dieienigen Säze, welche bewiesen werden müssen, in der Ordnung auf einander, daß

daß kein Saz vorgetragen wird, der nicht an sich klar ist, oder aus den vorhergehenden Säzen bewiesen werden kann.

Die Evidenz der Mathematik hängt keinesweges von der Methode, sondern von den Erklärungen und Grundsäzen ab. Die Mathematik unterscheidet sich von allen andern Wissenschaften dadurch, daß sich ihre Begriffe konstruiren, d. i. die Theile eines Begrifs in Eins vereinigen lassen. Die Konstruktionen sind theils arithmetisch, theils geometrisch. In der Arithmetik bedient man sich dazu der Buchstaben oder Zahlzeichen; in der Geometrie aber der Linien, welches wesentliche Zeichen sind. Der Mathematiker kann daher in konkreto, d. i. aus sinnlichen Figuren folgern. Zu dieser Absicht werden in den geometrischen Aufgaben gewisse Stüke gegeben, die man Data nennt, durch welche man die Möglichkeit der Aufgabe einsieht. Diese Data sind die Theile des Begrifs, die zu einem Ganzen zusammengesezt, d. i. konstruirt werden. Die Lehrsäze beruhen zuweilen auf angenommenen Säzen, welche Hypothesen genannt werden und der Schlus, der daraus entsteht, ist der eigentliche Saz. Z. B. in der Astronomie ꝛc. Die Beweise der Lehrsäze und der Aufgaben werden mathematisch auf folgende Art geführt: Entweder durch Betrachtung der wichtigsten Worte im Saze, dessen Worterklärung man sich bedient, oder durch Nachforschung nach dem, was schon aus dem Vorhergehenden davon bekannt; Oder, daß man den Beweis durch die Veränderung der Figur findet, die man so lange verändert, bis man eine andere hervorbringt, von welcher man schon bewiesene Wahrheiten hat. Diese Veränderung der Figur zum Beweise, wird die Präration genannt.

Die Ueberschriften der mathematischen Säze, welche anzeigen, zu welcher Art sie gehören, nüzen nur Anfängern, tragen aber übrigens nichts zur mathematischen Gewisheit

bei, daher man diese Ueberschriften in andern Wissenschaften nur vergebens nachahmet.

Jeder Aufmerksame wird die mathematische Methode aus der Mathematik selbst am sichersten lernen. Hierüber findet man viele nüzliche Betrachtungen in folgender Schrift: Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik ꝛc. Von Joh. Andr. Christ. Michelsen. Berlin 1789.

Anmerkung.

Diese kurze Uebersicht der Vernunftlehre ist nur für diejenigen entworfen, die mit Wissenschaften noch ganz unbekannt sind. Vielleicht erweken sie bei mehrern die Begierde, vollständigere Abhandlungen darüber zu lesen. Die in der Vorerinnerung genannte Klügelsche Encyklopädie verdient in aller Absicht von einem jeden Wisbegierigen, also auch in dieser gelesen zu werden. Wer die darin vorgetragenen Lehren gehörig gefaßt hat, wird sich auch mit noch vollständigern Schriften dieser Art, an welchen kein Mangel ist, mit Nuzen beschäftigen können.

II.

II.

Eintheilung aller mathematischen Wissenschaften.

Die Bestimmung eines Gegenstandes, wodurch gedacht werden kann, wie vielmal Eins in ihm gesezt ist, heißt dessen Grösse (Quantitas). Jeder Gegenstand, dem eine Grösse zukommt, heißt eine Grösse (Quantum). Eine Grösse, die mit vielen einerlei ist, wird ein Ganzes, und die Vielen, welche mit dem Ganzen einerlei sind, werden Theile genannt, daher ist iede Einheit, die das Ganze bestimmen hilft, ein Theil. Jeder Gegenstand muß eine Grösse haben, weil der Verstand dasienige, was ohne alle Grösse ist, nicht erkennen kann, also für ihn kein Gegenstand, d. i. Nichts ist. Wir stellen uns selbst in dem für uns unbestimmbaren Raume Räume vor, die zusammen genommen zu einem Raume gehören, folglich denken wir uns den Raum ebenfalls als eine Grösse. Demnach ist iede Grösse einer Vermehrung und Verminderung fähig. Wie groß eine Sache sei, entdekt uns die unmittelbare Vorstellung, die wir von der Sache selbst haben, oder die Vergleichung mit einer bekannten Grösse. Wer eine Meile gereiset ist, hat durch die Empfindung den Begrif von der Länge des Weges erhalten; und wer nun 50 Meilen nennen hört, stellt sich diesen Weg 50 mal an einander gesezt vor.

Die Weite zweier Oerter von einem dritten zu vergleichen, pflegt man iede durch Meilen ꝛc. auszudrüken. Dasienige, womit man vergleicht, heißt das Maas, welches im vorigen Beispiele die Länge einer Meile war. Das Maas wird als bekannt angenommen, und vorausgesezt, daß ieder, der es zu einer Vergleichung nöthig hat, einen hinlänglichen Begrif davon haben wird. Dieses Verfahren

ren nennt man messen. Ist das Maas grösser als das Gemessene, so bestimmt ein Theil des Maasses die Grösse des Gemessenen.

Unmittelbare oder wirkliche Messungen sind nicht schwer; zumal wenn es nicht auf die größte Schärfe ankommt; so kann z. B. ein ieder eine Entfernung mit Schritten messen ꝛc. Soll man aber z. B. die Entfernung zweier Oerter angeben, ohne daß man unmittelbar mißt: so ist das Geschäfte schwer und sezt Begriffe von Grössen voraus, aus welchen sich die Vergleichung durch Vernunftschlüsse herleiten läßt, die man durch die Sinnen nicht unmittelbar empfindet. Dies ist das Geschäfte der Mathematik. Da sich nun diese Vergleichungen alle auf Grösse einschränken: so heißt die Mathematik die Wissenschaft der Grössen oder Grössenlehre *). Die mathematische Erkenntnis der Grösse kann man in eine gemeine und gelehrte abtheilen. Beide sind einander unentbehrlich, und die gemeine wird durch die gelehrte vollkommner.

Man betrachtet die Grösse entweder von allen Eigenschaften einer Sache abgesondert (in abstrakto), oder in Verbindung anderer Eigenschaften einer Sache (in konkreto).

Die Grösse in abstrakto ist der Gegenstand der reinen (pura), die Grösse in konkreto aber, der Gegenstand der angewandten (applikata) Mathematik.

Die

*) Die ursprüngliche Bedeutung des Worts Mathematik zeigt eigentlich Wissenschaft an. Die Griechen nannten sie deswegen so, weil entweder die mathematischen vorzugsweise diesen Namen verdienen, oder weil sie wahre Vorbereitungswissenschaften sind, oder weil man sie der Zeit und ihrem Ursprunge nach eher, als andere Wissenschaften vortragen konnte. Von den Persern wurde die Mathematik die schwere Wissenschaft genannt.

Die Grösse einer Kugel, deren Durchmesser 4 Zolle ist, zu bestimmen, gehört in die reine — hingegen die Grösse einer bleiernen 4 Pfund schweren Kugel anzugeben, in die angewandte Mathematik.

Die Grösse ist entweder extensiv oder intensiv. Die Theile der extensiven Grösse fallen neben einander z. B. Linie, Fläche, Körper; die der intensiven Grösse hingegen in einander z. B. Grade der Wärme, des Feuers, der Moralität rc.

A. Reine Mathematik.

Eine Grösse kann man blos als eine Menge von Theilen — als ein Ganzes (Totum) betrachten, in der Arithmetik; oder man kann zugleich auf die Verbindung und Ordnung der Theile sehen, welches ein gewisses zusammengeseztes Ding (Kompositum) ausmachet, in der Geometrie. Im ersten Falle heißt die Grösse eine unstäte (diskreta), im andern Falle aber eine stäte (kontinua) Grösse. Hieraus läßt sich leicht begreifen, was eine ausgedehnte Grösse und überhaupt Ausdehnung und Raum nach mathematischen Begriffen sei.

1. Arithmetik. Gemeine und allgemeine. Hieher gehört auch die Mathematik der intensiven Grössen, von der noch wenig bekannt ist.

2. Geometrie. Niedere und höhere. Jene handelt von geraden Linien, Kraisen und davon abhangenden Flächen und Körpern, diese von den Kegelschnitten, der Parabel, Ellipse, Hyperbel und andern krummen Linien. Eine besondere Lehre in der niedern Geometrie, von den Dreieken, hat den Namen Trigonometrie erhal-

erhalten. Sie lehrt zu drei bekannten Stükken eines Dreiekes die übrigen durch Rechnung zu finden. Da die Dreieke geradelinige, aber auch sphärische sein können: so wird sie in die ebene und sphärische Trigonometrie eingetheilt.

3. Analysis, die Wissenschaft unbekannte Grössen, die man als bekannt annimmt, aus ihrem Verhältnis gegen bekannte zu finden. Sie zerfällt in folgende Theile:

a. die ältere. Ist wenig davon übrig.

b. Die neuere. In der neuern werden die Grössen als Zahlen betrachtet, aber allgemeiner bezeichnet. Die Verhältnisse derselben werden auf Gleichungen (Aequationen) gebracht und berechnet; daher die Algebra (nicht Algebre), die Kunst Gleichungen aufzulösen. Nach den Beschaffenheiten der Grössen giebt es:

aa. Die Analysis des Endlichen. Anwendungen auf Geometrie und Trigonometrie haben die Namen analytische Geometrie und analytische Trigonometrie verursacht.

bb. Die Analysis des Unendlichen. Daher die Berechnung des Unendlichen, welche eingetheilt wird in

a. die Differential- und

b. die Integralrechnung.

Die Analysis und ihre Anwendungen begreift man unter dem allgemeinen Namen höhere Mathematik.

B. An-

B. Angewandte Mathematik.

Die simpelsten Anwendungen der reinen Mathematik sind die auf kaufmännische Rechnungen und das Feldmessen. Zum Feldmessen aber werden ausser den mathematischen noch eine Menge anderer Kenntnisse erfordert; die aus Uebungen und gewissen Kunstgriffen hergeleitet werden, daher rechnen auch manche das Feldmessen zur technischen Mathematik. Wichtigere Anwendungen der reinen Mathematik hat man bis iezt auf die Kräfte der Körper, das Licht und die himmlischen Körper gemacht, daher man folgende Wissenschaften erhalten hat.

1. Die Dynamik — betrachtet die Kräfte der Körper überhaupt — Hydrodynamik — die Kräfte der flüssigen Körper insbesondere;

a. Statik — untersucht die Geseze der Körper, unter welchen sie ein Gleichgewicht bewirken.

Hydrostatik — eben dies in Rüksicht auf flüssige Körper.

b. Die Mechanik betrachtet die Kräfte der Körper in der Bewegung.

aa. Hydraulik — untersucht eben dieses in Rüksicht der flüssigen Körper.

bb. Aerometrie handelt von den Gesezen des Gleichgewichts flüssiger elastischer Körper.

Aeromechanik betrachtet die Kräfte dieser Körper in der Bewegung.

cc. Geschüzwissenschaft und insbesondere die Artillerie, welche lehrt, wie nicht allein die Wirkung des entzündeten Schiespulvers auf die Geschüzkugeln berechnet, sondern

dern auch die Bahn der leztern nach ihrer Gestalt und Grösse verzeichnet und ausgemessen werden kann.

dd. Die Taktik, welche die besondern Stellungen und Bewegungen der Truppen, der Kriegsmaschinen und des Gepäkes, ordnen lehrt.

ee. Die Lagerwissenschaft.

2. Die Optik enthält die auf das Licht angewandte Mathematik.

a. Die besondere Optik handelt von dem gerade fortgehenden Lichte. Ein Hauptstük dieser Wissenschaft ist die Photometrie, und ein Anhang die Perspektiv, welche eine iede Figur so zu zeichnen lehrt, wie sie die von dem Gegenstande ins Auge fallenden Strahlen auf einer Ebene abbilden.

b. Katoptrik, welche von dem, von Spiegeln zurükgeworfenen,

c. Dioptrik, die von dem in durchsichtigen Materien gebrochenem Lichte handelt.

3. Die Astronomie ist die Wissenschaft von den himmlischen Körpern, und wird eingetheilt in die theorische und sphärische. Von ihr hangen ab:

a. die mathematische Geographie, welche die Abtheilung des Raums auf der Erde lehrt, indem man sie als ein Ganzes betrachtet. Ein Hauptstük der mathematischen Geographie ist die Lehre von Vermessungen ganzer Distrikte — Länder — Staaten. — Hieher

her kann auch die Hydrographie oder Schifskenntnis gerechnet werden.

b. Die mathematische Chronologie, oder die Abtheilung der Zeit nach den Erscheinungen am Himmel in Jahre, Jahrhunderte, Jahrtausende ꝛc.

c. die Gnomonik, welche die Abtheilung der Zeit in kleinere Theile durch Hülfe des Schattens lehrt.

Ausser den hier erwähnten, verdienen noch die Bauwissenschaften angeführt zu werden, welchen der Name Wissenschaft dann beigelegt werden kann, wenn sie Anleitung geben, wie nach Regeln der Festigkeit, Bequemlichkeit und Schönheit gebauet werden soll. Da aber zu der Ausübung dieser Wissenschaften eine Menge andere Kenntnisse erfordert werden, die nicht mathematisch, sondern aus der Physik, Chemie, Naturgeschichte, dem Kameralwesen und der Haushaltung entlehnt sind, und sogar Handwerkskenntnisse voraussezen: so kann man sie am schiklichsten unter dem Namen der praktischen Mathematik aufführen. Von einigen werden sie unter dem Namen der technischen Mathematik abgehandelt. Die wirkliche Ausübung erhält dann nur den Namen Kunst. Diese Wissenschaften enthalten diejenigen Kenntnisse, die unmittelbar auf das Wohl eines ganzen Staates und das specielle Beste einzelner Staatsbürger einfliessen, daher man diese Theile der Mathematik die politische Mathematik nennen könnte.

Die politische oder praktische Mathematik enthält also die Bauwissenschaften.

Sie begreifen in sich:

1. den Wasserbau — Hydrotechnik; wozu der

Wehre- Schleusen- Deich- Damm- und Brükenbau gehört.

2. Den Landbau. Dieser enthält

a. die Civilbauwissenschaft. Nach der verschiedenen Absicht und Bestimmung der Gebäude hat man einzelne Kapitel mit eigenen Namen belegt:

aa. kameralistische,

bb. ökonomische oder landwirthschaftliche Bauwissenschaft.

b. Militärbauwissenschaft.

Die vorzüglichste Anwendung auf eigentliche militärische Gegenstände enthält

die Befestigung.

Theile derselben sind:

aa. die Festungsbauwissenschaft,

bb. die Verschanzungsbauwissenschaft.

3. Die Schiffbauwissenschaft.

4. Die praktische Maschinenlehre, welche ebenfalls noch in besondere Theile zerfällt, die ihren Grund in der Absicht der Maschinen haben, wozu sie bestimmt sind, z. B. Mühlen, Kriegsmaschinen etc.

5. Die Wahrscheinlichkeitrechnungswissenschaft. Man macht Anwendungen der Arithmetik auf die Berechnung der Sterblichkeit der Menschen, der Leibrenten, Tontinen etc. bestimmt nach Regeln der Wahrscheinlichkeit das Wachsthum eines Staats an Bürgern etc., und daher ist der Name der Wahrscheinlichkeitrechnungswissenschaft entstanden.

Anmer-

Anmerkung.

Die Theorie der Musik ist von Euklides und Euler durch die höhere Mathematik, so wie die Pyrometrie nach Liebknecht von Lambert bearbeitet worden. Durch Bouguer, Lambert und Karsten ist die Photometrie zu einem hohen Grade der Vollkommenheit gestiegen. Diese Theorien verdienen also ebenfalls zu den mathematischen Wissenschaften gerechnet zu werden.

Mathesis Forensis, oder die auf das Recht angewandte Mathematik, gehört für den Juristen; so wie Mathesis Biblika, oder die auf die biblischen Alterthümer angewandte Mathematik für den Theologen.

Chiromantie, Astrologie und Physiognomik wurden ehedem, aber mit wenigerm Rechte zu den mathematischen Wissenschaften gezählet.

III.

Plan des gegenwärtigen Werkes.

Erster Theil.

Die Vorbereitungswissenschaften.

Erste Abtheilung. Allgemeine Vorbereitungslehren; gemeine und allgemeine Arithmetik.

Zweite Abtheilung. Gemeine Geometrie und ebene Trigonometrie; gemeine Analysis oder Algebra, und analytische Geometrie.

Dritte Abtheilung. Mechanische und optische Wissenschaften, in so fern sie dem Infanterie- und Kavallerieofficier unentbehrlich sind; militärisch mathematische Geographie, verbunden mit der Lehre vom Aufnehmen durch Hülfe der Specialcharten.

Zweiter Theil.

Die eigentlichen Kriegswissenschaften.

Erste Abtheilung. Geschüzwissenschaft.

Zweite Abtheilung. Taktik der Infanterie, Kavallerie und Artillerie.

Dritte Abtheilung. Befestigungswissenschaft.

Vierte Abtheilung. Lagerwissenschaft.

Fünfte Abtheilung. Einrichtung, Vollzähligaltung und Verpflegung der Armeen.

Dritter Theil.

Hülfswissenschaften.

Erste Abtheilung. Physische und politische Geographie in militärischer Rücksicht.

Zweite Abtheilung. Geschichte und Statistik, in so fern sie den Officier interessiret, nebst einer kurzen Geschichte der wichtigsten Kriege.

Dritte Abtheilung. Nöthige Lehren aus dem Natur- Völker- und Kriegsrechte, verbunden mit der dem Officiere unentbehrlichsten Kenntnis der Landesgeseze.

Anfangs-

Anfangsgründe
der
Arithmetik.

Erster Abschnitt.
Die gemeine Arithmetik.

I.
Von dem
Begriffe der gemeinen Arithmetik und von den Eigenschaften der Grösse und der Zahlen überhaupt.

Erklärungen.

§. 1.

Jede Grösse, die für sich bestehend betrachtet werden kann, wird Eins, ein Ganzes oder überhaupt die Einheit genannt. Eine Menge Einheiten von einerlei Art aber machen eine Zahl *).

So

*) Die Begriffe von Grösse überhaupt, von Menge, Vielheit, Zahl, Anzahl rc. rechnet man unter die ersten Grundbegriffe der mathematischen Wissenschaften und sezt voraus, daß ieder, der sich mit der Mathematik zu beschäftigen Willens ist, davon hinlänglich richtige Begriffe haben wird. Wem diese Begriffe mangeln, dürfte sie schwerlich durch eine Erklärung lernen.

So ist ein Thaler eine für sich bestehende Grösse, folglich ein Ganzes oder die Einheit. Vier Deutsche und drei Engländer haben das mit einander gemein, daß sie Europäer sind, und in sofern gehören sie zu einerlei Art; in sofern sie aber zu verschiedenen Nationen Europens gerechnet werden, sind sie von verschiedener Art. Daher kann man auch nicht sagen: vier Deutsche und drei Engländer sind zusammen sieben Deutsche, auch nicht sieben Engländer, aber wohl sieben Europäer, weil die Einheit ein Europäer ist *).

Das Nöthige von dem Begriffe Grösse ist indessen in der allgemeinen Einleitung bemerkt worden.

§. 2. Die Arithmetik ist die Wissenschaft aus gegebenen Zahlen unbekannte zu finden, von welchen eine Eigenschaft in Ansehung der gegebenen Zahlen bekannt ist.

Man soll z. B. eine Zahl finden, die so groß ist, als vier und zwei.

Vier und zwei sind die gegebenen Zahlen, und die bekannte Eigenschaft der unbekannten Zahl die man finden soll

*) Die Wahl der Einheit richtet sich nach der Absicht, wozu man sie nöthig hat. So wählt der Astronom eine andere Einheit, wenn er die Grösse der Entfernung eines Punktes ꝛc. am Himmel von einem andern angeben will, als der Feldmesser, der die Grösse der Entfernung eines Ortes von einem andern auf der Erdoberfläche bestimmt. Jener wählt gewöhnlich halbe Erddurchmesser zu der Einheit, dieser aber Ruthen ꝛc. Eben so verhält es sich, wenn man den Werth der Münzen bestimmt. Eine Menge Thaler haben zu ihrer Einheit einen Thaler. Ein Thaler aber kann als eine Menge von Groschen angesehen werden, und dann ist ein Groschen die Einheit ꝛc.

soll, ist diese, daß sie so groß als die gegebenen zusammen genommen sein soll.

§. 3. Man theilt die Zahlen ein in ganze und gebrochene oder Brüche. Eine ganze Zahl entsteht, wenn man eine Menge Einheiten von einerlei Art völlig mehreremal, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch aber, wenn man einen gewissen Theil der Einheit ein- oder mehreremal nimmt. So ist drei Thaler als Zahl betrachtet eine ganze Zahl, hingegen ein oder zwei Drittheile eines Thalers eine gebrochene Zahl oder ein Bruch, weil der Thaler das Ganze oder die Einheit ist. Wenn von Zahlen überhaupt die Rede ist, so versteht man gewöhnlich ganze Zahlen darunter.

§. 4. Ferner pflegt man die Zahlen in konkrete oder genannte und in abstrakte oder ungenannte einzutheilen.

Eine Zahl heißt eine konkrete oder genannte Zahl, wenn die Art und Beschaffenheit der Einheiten ausser ihrer Grösse mit in Betrachtung kommt: hingegen eine abstrakte oder ungenannte Zahl, wenn auf die Art und Beschaffenheit der Einheiten nicht, sondern nur auf ihre Grösse Rüksicht genommen wird. So sind vier Thaler und acht Ruthen genannte; vier und acht aber, blos als Grössen betrachtet, ungenannte Zahlen*).

*) Auf dieser Eintheilung der Zahlen beruht die Eintheilung der Arithmetik in theoretische und praktische. Die theoretische hat alsdenn die ungenannten Zahlen, die praktische Arithmetik hingegen die genannten Zahlen zum Gegenstande.

§. 5. Endlich theilt man noch die Zahlen in homogene oder gleichartige und in heterogene oder ungleichartige.

Homogene oder gleichartige Zahlen sind solche, die aus Einheiten von einerlei Art; heterogene oder ungleichartige solche, die aus Einheiten von verschiedener Art bestehen.

So sind sechs Thaler und vier Thaler gleichartige, hingegen drei Thaler und fünf Meilen ungleichartige Zahlen. Eben so auch zwei Thaler und sieben Groschen. Im lezten Falle können zwei Thaler und sieben Groschen gleichartige Zahlen werden, weil die eine aus Theilen von der andern besteht.

§. 6. Jede Zahl kann man vermehren und vermindern, dies liegt im Begriffe derselben (§. 1.).

Soll man unbekannte Zahlen finden, (und dies ist das Geschäfte der Arithmetik §. 2.), so muß man mit den gegebenen Veränderungen vornehmen, die in der Eigenschaft der Zahlen gegründet sind, und die Mittel, durch deren Hülfe man diese Veränderungen vornehmen kann, werden insgemein Rechnungsarten genannt *): daher heißt auch rechnen: aus

*) Die Rechnungsarten selbst sind entweder einfach oder aus mehrern andern zusammengesezt; daher nennt man sie auch im ersten Falle einfache, im andern Falle aber zusammengesezte Rechnungsarten. Die einfachen liegen den zusammengesezten zum Grunde: daher werden iene bei diesen vorausgesezt. Die zusammengesezten werden gewöhnlich unter dem Namen praktische Rechnungsregeln in der Arithmetik besonders vorgetragen. Uebrigens erstreken sich die Rechnungsarten über ganze und gebrochene Zahlen.

aus gegebenen Zahlen unbekannte finden u. s. w. (§. 2.) *).

§. 7. Eigentlich sind nur zwei Rechnungsarten in der Natur der Zahlen gegründet, nehmlich die Addition und die Subtraktion.

Durch den Gebrauch der Addition kann man Zahlen vermehren und durch den Gebrauch der Subtraktion vermindern.

Man addirt, wenn man eine Zahl um eine oder mehrere andere gegebene Zahlen vermehrt, und subtrahirt, wenn man eine Zahl um so viel vermindert, als die andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

Da sich aber der Fall oft zuträgt, daß man eine Zahl mehreremal einer andern gegebenen zusezen und eben so eine Zahl von einer andern gegebenen mehreremal wegnehmen soll: so hat man für den ersten Fall die Multiplikation und für den lezten die Division als Rechnungsarten eingeführt, die aber ihren Grund in der Addition und Subtraktion haben; daher zählt man vier Rechnungsarten.

Eine und eben dieselbe Zahl kann nicht zugleich vermehrt und vermindert werden, weil die Begriffe

 Ver-

*) Die Arithmetik wird auch gemeinhin Rechenkunst oder besser Rechnungswissenschaft genannt, und unter diesem Namen in gemeinen Rechenbüchern vorgetragen, weil iede Veränderung, die mit den Zahlen vorgenommen werden kann, mit dem Worte rechnen bezeichnet wird. Eigentlich ist der Begrif rechnen, und der Name Rechenkunst wohl daher entstanden, wei man vermittelst gewisser Zeichen der bekannten Zahlen die unbekannten Zahlen nicht selbst sucht; sondern ebenfalls Zeichen, welche aber die unbekannten Zahlen angeben.

Vermehrung und Verminderung einander entgegengesezt *) sind. Aus diesem Grunde sind Addition und Subtraktion, und so auch Multiplikation und Division einander entgegengesezt, und umgekehrt **).

§. 8. Wenn zwei Grössen oder Zahlen mit einander verglichen werden, so wird eigentlich untersucht, ob beide gleich oder ungleich sind. Ueberhaupt sind zwei oder mehrere Dinge einander gleich, wenn sie in Absicht ihrer Grösse einerlei sind, so daß iedes die Stelle des andern vertreten kann. Ist dieses nicht, so sind die Dinge ungleich groß. Ein paar ungenannte Zahlen sind gleich groß, wenn sie einerlei Menge Einheiten enthalten, ungleich groß hingegen, wenn sie nicht beide aus einerlei Menge Einheiten bestehen. Wenn man genannte Zahlen in Ansehung ihrer Grösse vergleicht: so muß man die Zahlen nicht allein nach der Menge, sondern auch nach dem Werthe der Einheiten, woraus sie bestehen, untersuchen. So sind vier Thaler und vier Groschen den ungenannten Zahlen, aber nicht dem Werthe der Einheiten nach, einerlei; folglich als genannte Zahlen betrachtet, ungleich.

§. 9. Die Arithmetik beschäftiget sich überhaupt mit der Grösse, in sofern sie als ein solches Ganzes betrach-

*) Den Begrif entgegengesezt kann man hier als bekannt annehmen. Wer damit nicht befriedigt zu sein glaubt, darf sich nur an vorwärts und rükwärts zurükgelegten Weg erinnern und der Begrif wird deutlich, wenigstens klar werden. Umständlicher wird entgegengesezt im Folgenden erkläret werden.

**) Man bedient sich des Ausdruks umgekehrt der Kürze halber im Vortrage der mathematischen Wissenschaften, weil man sonst, wie im gegenwärtigen Falle noch hinzusezen müste: Die Subtrak-

trachtet wird, das aus Theilen bestehet, wovon man mehrere oder wenigere nehmen kann, die aber alle zusammen genommen für das Ganze gesezt werden können. Eben so müssen sich diese Theile auch einzeln für einander sezen lassen, ohne daß der Begrif von dem Ganzen dadurch verändert wird. So ist z. B. ein Regiment Soldaten ein Ganzes, das aus Theilen oder einzelnen Soldaten bestehet. Jeder Soldat kann blos als Grösse betrachtet an des andern Stelle gesezt und alle zusammen genommen können für das Ganze oder Regiment gesezt werden.

Um die Gleichheit zweier Grössen auszudrücken, hat man das Zeichen (=) anstatt des Wortes gleich gewählt, welches zwischen beide gleiche Grössen gesezt wird.

§. 10. Sind zwei Grössen ungleich groß, oder kürzer ungleich: so heißt allemal die eine von beiden die grössere, und die andere die kleinere. Ein Theil der einen von zwei ungleichen Grössen wird so groß sein, als die andere, folglich wird ihre Grösse die Grösse der andern ganz, und noch etwas mehr enthalten. Diese Grösse nennt man die grössere, und die andere, die nur so groß ist als ein Theil der grössern, wird die kleinere genannt. Die Ungleichheit zweier Grössen wird durch das Zeichen (<) angezeigt, da denn die Oefnung gegen die grössere und folglich die Spize gegen die kleinere Grösse zu stehen kommt *).

traktion ist der Addition, und die Division der Multiplikation entgegengesezt.

*) Daß diese Säze auch für die Gleichheit und Ungleichheit der Zahlen gelten, folgt aus dem Begriffe der Zahl (§. 1.).

Allgemeine Grundsäze.

§. 11. Jede Grösse, also auch iede Zahl, ist sich selbst gleich *). Wenn a das Zeichen einer Grösse ist: so kann der Saz kurz auf diese Art ausgedrükt werden, a = a, oder ein Thaler = ein Thaler, das ist, ein Thaler ist einem Thaler gleich.

§. 12. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich **).

Ein Thaler = vier und zwanzig Groschen.

§. 13. Das Ganze ist grösser als ieder einzelne oder einige Theile allein genommen ***).

Ein Thaler > ein Groschen,
auch ein Thaler > sechzehn Groschen.

§. 14. Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind; so sind sie einander selbst gleich ****).

Ei-

*) Diesen Grundsaz, der das erste Kennzeichen der Gleichheit der Grössen in der Allgemeinheit enthält, kann man auch auf folgende Art ausdrüken: Eine gewisse Grösse kann nicht zugleich diese und auch eine andere sein, oder: Etwas kann nicht zugleich sein und nicht sein. Er ist der Saz des Widerspruchs der Mathematiker, auf welchen die Beweise der reinen Mathematik zurükgeführt werden können, und enthält den Grund der an der Mathematik so gerühmten unbezweifelten Gewisheit.

**) Dieser Saz ist eine Folge aus dem Saze §. 11. Alle Theile zusammen genommen machen das Ganze aus. Wäre nun das Ganze allen seinen Theilen zusammen genommen ungleich: so wäre es selbst ungleich, folglich würde es zugleich das Ganze und auch nicht das Ganze sein, welches gegen den Saz in §. 11. ist.

***) Dieser Saz enthält ein Kennzeichen der Ungleichheit.

****) Dieses Kennzeichens der Gleichheit bedient man sich in dem Falle, wenn man gewisse Grössen vermittelst einer dritten vergleicht.

Eine Ruthe = zehn Fuß
Zehn Fuß = hundert Zoll, also auch
——————————————— *)
Eine Ruthe = hundert Zoll.

§. 15. 1) Was grösser oder kleiner ist, als eine von zwei gleichen Grössen, das ist auch grösser oder kleiner als die andere.

Ein Thaler = vier und zwanzig Groschen
Ein Dukaten > ein Thaler
———————————————
Ein Dukaten > vier und zwanzig Groschen.

und Ein Dukaten = drei Thaler
Ein Gulden < ein Dukaten
———————————————
Ein Gulden < drei Thaler.

oder allgemeiner **).

$a = b$ und $a = b$
$c > a$ $d < a$
———————— ————————
$c > b$ $d < b$

2)

gleicht. Es giebt auch Fälle, wo man diesen Saz eigentlich zweimal anwenden müste, wenn man ihn nicht verkürzt so ausdrüken könnte: Wenn zwei Grössen so groß sind als zwei andre gleiche Grössen, so sind sie unter sich gleich groß.

*) Der Strich wird gebraucht anstatt der gleichbedeutenden Wörter: also auch; so ist auch; mithin auch; folglich ꝛc.

**) Der Buchstaben bedient man sich häufig als allgemeiner Zeichen der Grössen, weil man dergleichen allgemeine Säze kurz durch sie bezeichnen kann, auch wird man durch den Gebrauch derselben nach und nach mehr an allgemeine Begriffe gewöhnt.

2) Was grösser ist, als die grössere von zwei ungleichen Grössen, das ist um so mehr auch grösser, als die kleinere.

Ein Thaler > neunzehn Groschen
Ein Dukaten > ein Thaler

Ein Dukaten > neunzehn Groschen

oder

$$\frac{\begin{array}{ccc} a & > & b \\ c & > & a \end{array}}{\begin{array}{ccc} c & > & b \end{array}}$$

3) Was kleiner ist, als die kleinere von zwei ungleichen Grössen, das ist um so mehr auch kleiner, als die grössere.

Ein Fuß < Ruthe
Ein Zoll < Fuß

Ein Zoll < Ruthe

oder

$$\frac{\begin{array}{ccc} a & < & b \\ c & < & a \end{array}}{\begin{array}{ccc} c & < & b \end{array}}$$

Anmerkung.

Diese allgemeinen Grundsäze sind wirklich nicht so fremd als sie auf den ersten Anblik scheinen. Wir urtheilen in vielen Fällen im gemeinen Leben darnach, nur daß wir nicht immer darauf Acht geben, daß einer oder mehrere dieser Säze zum Grunde liegen. Sie sind übrigens für die ganze Mathematik und für alle mit ihr verwandte Wissenschaften brauchbar. Die Wahrheit derselben liegt so deutlich vor Augen, daß sie keines Be-

Beweises bedürfen. Indessen haben doch einige Mathematiker für gut befunden, mehrere von diesen allgemeinen Grundsäzen zu Lehrsäzen zu machen, um sie förmlich beweisen zu können. Die angeführten Beispiele werden ohne Zweifel die Wahrheit derselben einem ieden deutlich darstellen, da sie meistens aus dem Gebrauche im gemeinen Leben schon bekannt sind, und überdies würden sie auch durch geführte Beweise nicht deutlicher werden, als sie an und für sich sind.

II.

Von den Zeichen und dem Werthe der Zahlen, oder von dem Zahlensysteme überhaupt.

Erklärung.

§. 16.

Zählen heißt einer jeden Zahl ihren Werth geben oder die Menge Einheiten, die sie enthält, bestimmt ausdrüken. Solte eine iede Zahl ihren eigenen Namen oder ein eigenes Zeichen erhalten, durch welches ihr Name und ihr Werth angegeben würde, so müste man in große Weitläuftigkeiten verwikelt werden: daher hat man nur wenige Zeichen und Namen gewählt, vermittelst welcher, wenn man sie einzeln gebraucht oder zusammensezt, iede Zahl und ihr Werth bezeichnet werden kann.

Willkürliche Säze.

§. 17. Nach der uns von Jugend auf bekannten Art zählt man von eins bis zehn; und diese Zahlen bestehen aus einfachen Einheiten. Man fängt alsdenn von neuen an, nur mit dem Unterschiede, daß man die ersten zehn beibehält und eine Einheit nach der andern zusezt.

sezt. Die hierdurch entstehenden Zahlen enthalten zusammengesezte Einheiten. Anstatt aber daß man sagen müste: zehn und eins, zehn und zwei u. s. w. giebt die Sprache folgende abgekürzte Ausdrüke, nehmlich eilf, zwölf. Die nächstfolgenden Zahlen haben keinen eignen Namen, sondern heißen: drei und zehen, vier und zehen u. s. f. nur daß man das Wort und wegläßt und kurz sagt: dreizehen, vierzehen, funfzehen u. s. w. Die Zahl zehen und zehen ist nichts anders als zehen zweimal genommen, und dafür hat die Sprache das Wort zwanzig. Zwanzig und zehen oder zehen dreimal genommen wird dreissig ausgedrükt; dreißig und zehen oder zehen viermal, vierzig u. s. f. funfzig, sechzig, siebzig, achtzig, neunzig. Anstatt neunzig und zehen oder zehen zehnmal genommen sagt man hundert. Nach hundert folgt hundert und eins u. s. w., dann zwei hundert, drei hundert ꝛc. Beim fernern Fortzählen muß man noch folgende Wörter merken, die in der Sprache liegen und vortheilhaft als Abkürzungen benuzt werden.

Man sagt anstatt	das Wort
zehnmal hundert	Tausend
tausendmal tausend	Million
tausendmal tausend Millionen	Billion
tausendmal tausend Billionen	Trillion
tausendmal tausend Trillionen	Quadrillion u. s. w *)

oder

*) Mehrere, besonders französische Schriftsteller, Camus, Bezout, Bossuet nennen tausend Millionen eine Billion, und tausend Billionen eine Trillion ꝛc. Diesem Geseze folgt der ehemalige Königl. Preußl. Ingenieurhauptmann Chevalier D'Estimauville in

oder

Die ersten neun einfachen Zahlen nennt man Einer, die zusammengesezten aber bis hundert Zehner, bis tausend Hunderter u. s. w.

§. 18. Anstatt der Namen der Zahlen bedient man sich zehen einfacher Zeichen, die man Zahlzeichen nennt, deren Figuren übrigens ganz willkürlich, die aber beibehalten werden, weil sie allgemein angenommen sind, nämlich:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	Null

Das Zeichen 0 heißt nach der Abstammung Ziffer und hat für sich keinen Werth, sondern füllt blos leere Stellen.

Damit man vermittelst dieser Zahlzeichen iede mögliche Zahl auszudrüken im Stande sei, hat man iedem Zahlzeichen ausser dem eigenthümlichen Werthe noch einen besondern gegeben, den die Stelle angiebt, in welcher sich eins dieser Zahlzeichen befindet. Folgendes Gesez bestimmt den Werth der Zahlzeichen nach den Stellen.

Man schreibt die Zahlzeichen von der rechten gegen die linke Hand, und läßt iedes Zahlzeichen in der folgenden Stelle zehnmal mehr bedeuten, als es bedeuten würde, wenn

in seinem Vollständigen Inbegriffe der Kriegswissenschaften. Magdeburg 1786. wovon aber nur der erste Theil erschienen ist. Ein Beweis, daß unser angenommenes Gesez willkürlich ist.

wenn es die nächstvorhergehende Stelle einnähme. In die Stellen, welche ledig bleiben müssen, sezt man die Null *).

Zusaz.

Bestimmt man also die Stellen von der rechten gegen die linke Hand: so erhält das Zahlzeichen 1 folgende Werthe:

In der ersten Stelle	Eins oder eine Einheit	1
zweiten	zehen oder zehn Einheiten	10
dritten	hundert	100
vierten	tausend	1000
fünften	zehntausend	10000
sechsten	hunderttausend	100000
siebenten	eine Million	1000000
achten	zehn Millionen	10000000
neunten	hundert	100000000
zehnten	tausend	1000000000
eilften	zehntausend	10000000000
zwölften	hunderttausend	100000000000
dreizehnten	eine Billion	1000000000000
vierzehnten	zehn Billionen	10000000000000
funfzehnten	hundert	100000000000000
sechzehnten	tausend	1000000000000000
siebzehnten	zehntausend	10000000000000000
achtzehnten	hunderttausend	100000000000000000
neunzehnten	eine Trillion	1000000000000000000

Hieraus sieht man, wie man sich im folgenden, wenn diese Tabelle fortgesezt werden sollte, verhalten müste. Ferner ist es

*) Nach dem Wallisius (Opera Mathem. P. I. Oxon. 1657. Arithm. Cap. IX. p. 59.) Verglichen mit Siegfrieds und Kästners Aufsäzen über die arabischen Ziffern, im Gothaischen Magazin und in der neuen philolog. Bibliothek. IV. Band wird die Erfindung dieser Zahlzeichen den Indianern zugeschrieben. Die Saracenen haben sie nach Spanien gebracht, und der berühmte Pabst Sylvester II. vorher Gerbert genannt, brachte sie aus Spanien nach Frankreich, und von da haben sie sich nachher allgemein verbreitet. Ihre erste Form ist vermuthlich um vieles geändert, aber das Hauptgesez ist beibehalten worden. Die Römischen Zahlzeichen, deren wir uns noch in manchen Fällen bedienen, bestehen aus den 5 Buchstaben I. V. X. L. C. ihres Alphabets. M und D scheinen aus cIↄ und Iↄ entstanden zu sein.

es deutlich, wenn man anstatt des Zahlzeichens 1 allenthalben das Zahlzeichen 2 sezte, daß man folgende Werthe erhalten würde: zwei, zwanzig, dreißig rc. zweihundert; zweitausend; zwanzigtausend; zweihunderttausend; zwei Millionen; zwanzig Millionen rc. Eben diese Bewandnis hat es mit iedem der einfachen Zahlzeichen.

Erklärung.

§. 19. Das Gesez, welches bei der Zusammensezung dieser Zahlen beobachtet wird, bleibt ununterbrochen dasselbe.

Man zählt von 1 bis 10, und daher wird gesagt: man zählt nach Decimalordnungen. Aus diesem Begriffe folgt also, daß alle zusammengesezte Zahlzeichen aus einfachen Zahlzeichen verschiedener Ordnungen bestehen. Die einzelnen Zahlzeichen oder wenn sie mit andern zusammengesezt werden und die erste Stelle (von der Rechten gegen die linke) einnehmen, bedeuten blos einfache Einheiten. Die Zahlzeichen in der zweiten Stelle zehnfache Einheiten, oder gehören zu der ersten Decimalordnung; die Zahlzeichen in der dritten Stelle, zu der zweiten Decimalordnung rc. Also gehört überhaupt ein Zahlzeichen, wenn es mit mehrern verbunden wird, zu derienigen Decimalordnung, welche die Zahl anzeigt, die man erhält, wenn man untersucht, in der wievielsten Stelle es nach der ersten steht.

Die Zahlen und ihre Werthe nach den angenommenen Säzen vermittelst der angeführten Zahlzeichen aus-

ausgedrükt, nennt man das Zahlensystem nach Decimalordnungen *)..

Zusaz.

Man kann daher die Decimalordnungen auf folgende Art, mit Strichen oder römischen Zahlzeichen angeben:

1	zeigt	einfache Einheiten	1	
10	—	zehnfache	1^{I}	1te Decimalordnung
100	—	hundertfache	1^{II}	2te Decimalordn.
1000	—	tausendfache	1^{III}	3te Decimalordn.
10000	—	zehntausendfache	1^{IV}	4te Decimalordn. 2c. **)

Aufgabe.

§. 20. Eine mit Zahlzeichen geschriebene Zahl zu lesen oder mit Worten auszusprechen.

Auf=

*) Nach dem Griechischen wird das System nach Decimalordnungen das dekadische System genannt, und wenn man sich dessen beim Rechnen bedient, so rechnet man nach der Dekadik. Einen Beweis, daß das dekadische System keinesweges das einzige sei, giebt die Dyadik, welche der Herr von Leibniz angegeben, da sich ihrer ehedem die Sinesen bedient haben sollen. Die Dyadik erfordert nur zwei Zahlzeichen 1 und 0. Uebrigens kann man auch vermittelst dieses Systems die ganze gemeine Arithmetik abhandeln. Nachricht und Anweisung findet man in der Schrift: Arithmetica binaria sive dyadica, das ist die Kunst, nur mit zwei Zahlen in allen vorkommenden Fällen sicher und leicht zu rechnen Herausgegeben von Georg Friedrich Brander. Augsburg 1769.

Ferner soll ein altes Volk in Tracien nur bis auf vier gezählt haben.

Andere haben auf zwölf und vier und zwanzig zu zählen versucht, welches allerdings möglich, aber von weiter keinem Nuzen ist.

**) Daß es sich mit den übrigen Zahlzeichen eben so verhalte, kann man aus dem vorhergehenden leicht beurtheilen.

Auflösung.

1. Man theile die Zahlzeichen von der Rechten gegen die Linke in Klassen, und gebe ieder derselben drei Zahlzeichen: in der lezten zur Linken können auch weniger als drei stehen.
2. Damit man beim Aussprechen die Stellen leicht finde, und die denselben zukommenden Werthe nicht verwechsle, so bezeichne man sie auf folgende Art. Ueber das erste Zahlzeichen in der dritten Klasse (versteht sich von der Rechten gegen die Linke) mache man einen Strich (I) oder eine römische I; über das erste in der fünften Klasse zwei oder II; über das erste in der siebenten Klasse drei oder III; über das erste in der neunten Klasse vier oder IV. rc.
3. Das Zahlzeichen, welches mit einem Striche (I) bezeichnet ist, lese man Millionen, das worüber zwei (II) stehen, Billionen; über dem drei (III) stehen, Trillionen; über welchem sich viere (IV) befinden, Quadrillionen rc.
4. Die Zahlzeichen derjenigen Klassen, über welchen kein Strich oder römisches Zahlzeichen stehet, werden Tausende gelesen, doch ist davon die erste Klasse ausgenommen. In jeder Klasse insbesondere drükt man das erste Zahlzeichen durch Einer, die zweite durch Zehner und die dritte durch Hunderter aus.
5. Stellen, die mit Nullen angefüllt sind, übergeht man im Aussprechen.

Der Beweis folgt von selbst aus den willkührlichen Sätzen in §. 17. 18. und 19.

Es sei die Zahl

$$\overset{III}{12,}\ 594,\ \overset{II}{523,}\ 843,\ \overset{I}{657,}\ 316,\ 249,\ 253.$$

Ist die Zahl auf die hier gezeigte Art abgetheilt: so fange man von der Linken gegen die Rechte an auszusprechen:

Zwölftausend, fünfhundert und vier und neunzig Trillionen, fünfhundert und drei und zwanzig tausend, achthundert und drei und vierzig Billionen, sechshundert und sieben und funfzig tausend, dreihundert und sechzehn Millionen, zweihundert und neun und vierzig tausend, zweihundert und drei und funfzig.

oder

II I
29, 900, 052, 400, 001

Neun und zwanzig Billionen, neunhunderttausend und zwei und funfzig Millionen, vierhunderttausend und eins.

Zusaz.

Soll man eine durch Worte ausgedrükte Zahl mit Zahlzeichen bezeichnen, so merke man zuförderst den Werth der höchsten Zahl und bestimme darnach die Klassen nach den im §. gegebenen Regeln und seze alsdenn die Zahlzeichen, welche die gegebene Zahl bestimmt, in ihre Klassen. Mangeln Stellen in der gegebenen Zahl, so fülle man sie mit Nullen an.

Anmerkung.

Beim Aussprechen findet sich folgende Irregularität. Man bestimmt nach dem angenommenen Geseze die Stellen, die ein Zahlzeichen einnehmen soll, von der Rechten gegen die Linke und liest eine vorgelegte Zahl von der Linken gegen die Rechte, nur die Einer und Zehner in ieder Klasse werden gegen dieses Gesez verwechselt, denn man sagt z. B. (24) vier und zwanzig, anstatt zwanzig und viere. Vielleicht ist dies noch etwas Eigenthümliches von ihren ersten Erfindern, die vermuthlich auch die geschriebenen Zahlen von der Rechten gegen die Linke gelesen haben, so wie iezt noch die meisten morgenländischen Nationen zu schreiben und zu lesen gewohnt sind.

III.

III.

Von den vier Rechnungsarten in ungenannten ganzen Zahlen.

1. Addition.

Erklärung.

§. 21.

Die Addition lehrt aus gegebenen Zahlen eine andere finden, die so groß ist als die gegebenen zusammen genommen (§. 7.).

Die gesuchte Zahl wird die Summe genannt. Man kann daher die Summe als das Ganze und die gegebenen Zahlen als ihre Theile zusammen genommen ansehen (§. 12. **)). Das Zeichen der Addition ist (+), welches durch plus oder mehr ausgesprochen und zwischen die gegebenen Zahlen oder Grössen überhaupt gesezt wird *).

Grundsäze.

§. 22. 1. Gleiches zu gleichem addirt, giebt gleiche Summen.

*) Das Zeichen der Addition kann in Fällen das Addiren selbst vertreten, wenn es blos die Form, wie man die Summe findet, angeben, oder nur anzeigen darf, daß die gegebenen Zahlen oder Grössen addirt werden sollen. Bezeichnen z. B. a, b, c Grössen überhaupt, und sie machen zusammen genommen irgend eine Summe, so kann man sie vermittelst des Zeichens auf diese Art verbinden. $a + b + c$. Wird nun $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$ gesezt: so ist die Summe $4 + 6 + 8$. Wie man aber die Zeichen der Zahl findet, welche die Grösse der Summe angiebt, muß die Rechnungsart selbst lehren.

2. Wenn man dagegen zu ungleichen Grössen gleiche addirt, so werden die Summen ungleich. Die Summe ist grösser, wenn man eben soviel zu der grössern, hingegen kleiner, wenn man ebensoviel zu der kleinern addirt.

3. Um so mehr ist die Summe des grössern zum grössern, grösser, als die Summe des kleinern zum kleinern *).

Beispiele.

zu N. 1. $6 = 4 + 2$ allgemein $a = a$
$3 = 3$ $b = b$

$6 + 3 = 4 + 2 + 3$ $a + b = a + b$

zu N. 2. $12 > 10$ allgemein $a > b$
$4 = 4$ $c = c$

$12 + 4 > 10 + 4$ $a + c > b + c$

zu N. 3. $16 > 12$ allgemein $a > b$
$8 > 4$ $c > d$

$16 + 8 > 12 + 4$ $a + c > b + d$ **)

Forderungssaz.

§. 23. Die Summe zweier oder mehrerer Zahlen, kann man durch das Zusammenzählen in Gedanken

*) Diese Säze folgen unmittelbar aus dem Begriffe der Addition und bedürfen daher keines Beweises. Sie sind allgemein ausgedrükt und lassen sich folglich auch auf die Zahlen anwenden.

**) Nach diesen Formen wird ein ieder sich leicht Beispiele aus dem gemeinen Leben in genannten Zahlen denken können, welche diese Säze noch anschaulicher machen.

ken finden und durch das ihr zugehörige Zahlzeichen ausdrüken (§. 18.) *).

Aufgabe.

§. 24. Es sind zwei oder mehr Zahlen gegeben, man soll ihre Summe finden.

Auflösung.

1. Man schreibe die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke so untereinander, daß die einfachen Zahlzeichen, die zu einerlei Ordnung gehören, untereinander zu stehen kommen, d. i. man seze Einer unter Einer; Zehner unter Zehner; Hunderter unter Hunderter ꝛc. Unter diese Zahlen seze man einen Strich, damit die Summe darunter geschrieben werden kann.
2. Nun addire man von der Rechten gegen die Linke die Zahlzeichen, die zu einerlei Ordnung gehören, d. i. man fange bei den Einern an und gehe sodann zu den Decimalordnungen fort. Die von den Einern erhaltne Summe, wenn sie nicht über 9 ist, seze man unter den Strich in die Stelle der Einheiten. Ist diese gefundne Summe, die man Partialsumme nennen kann, grösser als 9, d. i. enthält sie einen oder mehr Zehner, so seze man die Einheiten unter den Strich, die Zehner aber behalte man in Gedanken, oder seze sie über den Strich unter die Reihe der Zehner.
3. Die aus den Einheiten erhaltenen Zehner addire man zu den Zehnern und merke die aus allen Zehnern erhaltne Summe. Ist sie nicht grösser als 9, so seze man sie unter den Strich in die Stelle der Zehner. Ist die Summe aber grösser als neun Zehner, d. i. enthält sie ei-

*) Daß dieser Forderungssaz nicht zu schwer ist, lehrt die Erfahrung. Wer nichts von der Arithmetik versteht, muß sich ganz allein mit dem sogenannten Rechnen im Kopfe behelfen.

einen oder mehr Hunderter: so seze man die einfachen Zehner unter den Strich und behalte die Hunderter in Gedanken (N. 1.).

4. Auf eben die Art addire man die Hunderter, Tausender ꝛc. und seze die daraus erhaltnen Summen unter den Strich.

Oder: Erhält man bei sehr vielen Zahlen in den Partialsummen mehr als ein Zahlzeichen: so seze man das niedrigste dem Werthe nach unter den Strich in seine gehörige Stelle und die übrigen addire man zu den Zahlzeichen in der folgenden Reihe oder Ordnung.

Beispiele *).

5473	gegebene Zahlen
1245	
6718	Summe

Nach der strengsten Theorie sollte man auf folgende Art addiren:

5473		
1245		
8	Einer	Partialsummen.
110	Zehner	
600	Hunderter	
6000	Tausender	
6718	Total, oder ganze Summe.	

4509875
2437943
4756728
9401536
21106082.

Be-

*) Bezeichnen a, b, c, d überhaupt Grössen, so kann man ihre Summe S nennen, und alsdenn ist $a + b + c + d = S$.

Ist

Beweis.

Die gefundene Summe kann man als das Ganze und die gegebenen Zahlen als alle Theile desselben ansehen (§. 9.). Da nun alle Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. der gegebenen Zahlen in der gefundenen Summe zusammen genommen enthalten, und das Ganze allen seinen Theilen zusammen genommen gleich ist (§. 12.); so folgt, die gefundne Zahl ist die verlangte Summe (§. 21.).

Anmerkung.

Sollte man beim Rechnen selbst, die Addition auf diese Art zu schwer finden: so kann man von den gegebenen Zahlen, wenn ihrer sehr viele sind, zwei oder mehrere nehmen und für sich addiren, die Partialsummen aber in die Totalsumme bringen.

Mit dem lezten Beispiele im §. würde man auf folgende Art verfahren.

4509875	4756728	
2437943	9401536	
6947818	14158264	Partialsummen.
	6947818	
	21106082	Totalsumme.

2. Subtraktion.

Erklärung.

§. 25. Die Subtraktion lehrt, wie man aus zwei gegebenen Zahlen eine Dritte finden soll, welche anzeigt, um wie viel die eine von den gegebenen, grösser ist als die andere. Die gefundene Zahl nennt man die Differenz, auch den Rest oder den Unterschied. Die gegebenen aber das Minuendum

 und

Ist aber a = 2, b = 4, c = 6, d = 8; so ist S = 20, denn 2 + 4 + 0 + 8 = 20.

und das Subtrahendum, da denn das Subtrahendum anzeigt, um wieviel das Minuendum vermindert werden soll.

Wenn man die Subtraktion blos anzeigen will, ohne wirklich zu subtrahiren: so bedient man sich dazu des Zeichens (—) welches minus oder weniger ausgesprochen wird, und sezt es vor dieienige Grösse oder Zahl, die subtrahirt werden soll; z. B. 8 — 4; 6 — 5. d. i. 8 soll um 4 vermindert werden 2c.

Zusaz.

Sollte eine Grösse oder Zahl, welche subtrahirt werden soll, schon eine Summe sein, die durch ihre Theile ausgedrükt ist: so seze man diese Theile, die zusammengenommen die Summe ausmachen in eine Parenthese ( ) und folgende Ausdrüke bedeuten alsdenn einerlei. 15 — (5 + 3); 15 — 8.

Grundsäze.

§. 26. 1. Wenn man gleiche Grössen von gleichen subtrahirt, so erhält man gleiche Differenzen.

2. Subtrahirt man aber gleiche Grössen von ungleichen, so erhält man ungleiche Differenzen, denn die grössere Grösse giebt auch eine grössere Differenz.

3. So auch wenn man von gleichen Grössen ungleiche subtrahirt, giebt die grössere Grösse die kleinere Differenz und die kleinere Grösse die grössere.

Beispiele.

Zu N. 1.

$$\begin{array}{c} 6 = 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 2 = 2 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} 8 = 6 + 2 \\ 3 = 3 \\ \hline 8 - 3 = 6 + 2 - 3 \\ \text{d. i. } 5 = 5 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{c} a = a \\ c = c \\ \hline a - c = a - c \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} a = m + n \\ d = d \\ \hline a - d = m + n - d \end{array}$$

Zu N. 2.

$$\begin{array}{c} 12 > 8 \\ 4 = 4 \\ \hline 8 > 4 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} 16 > 8 + 4 \\ 6 = 5 + 1 \\ \hline 16 - 6 > 8 + 4 - (5 + 1) \end{array}$$

d. i. $10 > 6$

$$\begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a - c > b - c \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} a > c + d \\ b = b \\ \hline a - b > c + d - b \end{array}$$

Zu N. 3.

$$\begin{array}{c} 15 = 15 \\ 8 > 7 \\ \hline 7 < 8 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} 10 = 6 + 4 \\ 6 > 2 + 3 \\ \hline 10 - 6 < 6 + 4 - (2 + 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a = a \\ b > c \\ \hline a - b < a - c \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} a = m + n \\ c > d \\ \hline a - c < m + n - d \end{array}$$

Forderungssaz.

§. 27. Die Differenz zweier Zahlen kann man in Gedanken finden, wenn keine von beiden grösser als 9 oder 18 ist, weil man nur zurükzählen darf.

Aufgabe.

§. 28. Eine kleinere Zahl von einer grössern zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Man schreibe die kleinere von den gegebenen Zahlen unter die grössere nach den Decimalordnungen, wie bei der Addition und ziehe unter sie einen Strich.
2. Subtrahire iedes Zahlzeichen von dem über ihn stehenden und seze die Differenz unter den Strich. Die Differenz

ferenz muß o sein, wenn beide Zahlzeichen einerlei Größe haben.

```
 69549783
 24536182
---------
 45013601
```

3. Ist das Zahlzeichen in der obern Zahl kleiner als das Zahlzeichen in der untern, welches subtrahirt werden soll, oder wohl gar eine Null: so nimmt man von dem nächstfolgenden Zahlzeichen in der obern Zahl Eins oder eine Einheit, die in der gegenwärtigen Stelle zehen gilt, und sezt an oder über dieses Zahlzeichen einen Punkt, der anzeigt, daß das Zahlzeichen um Eins vermindert worden. Dies drükt man durch das Wort Borgen aus.

```
                                 abgekürzet
  8 10  1 10                      .   .
 69.062.57                       6906257
 1492165                         1492165
-----------                      -------
 5414092                         5414092
```

4. Ist das Zahlzeichen, bei welchem man Eins borgen muß, eine Null, so übergeht man sie und borget bei dem nächstfolgenden Zahlzeichen. Das Geborgte oder die geborgte Einheit gilt zehen gegen die Stelle gerechnet, in welcher die Null stehet. Von diesen Zehen nimmt man Eins zu dem Zahlzeichen, für welches man borget, und da dies noch eine Stelle weiter rükwärts stehet, so gilt auch dies Eins zehen, folglich bleibt nur 9 für die Null.

```
                                  abgekürzet
  9            9
 10.          10. 10              ..   ..
 5.03567.02                       50356702
 32543615                         32543615
-----------                       --------
 17813087                         17813087
```

5. Fol-

5. Folgen mehr Nullen auf einander, bei welchen man borgen soll, so verfähret man wie in dem Beispiele N. 4, oder nach der Regel: Wenn man über mehrere nach einander folgende Nullen wegborget, so verwandelt man dadurch iede 0 in 9, weil jedes nächstfolgende Zahlzeichen zu einer Ordnung gehört, deren Einer zehnmal grösser sind als in der vorhergehenden Stelle.

									abgekürzet
		9	9	9	9	9			
	8	~~10~~.	~~10~~.	~~10~~.	~~10~~.	~~10~~.	10		. . . . . .
6	~~9~~.	0	0	0	0	0	4	5	690000045
1	2	4	5	7	8	9	5	3	124578953
5	6	5	4	2	1	0	9	2	565421092

Beweis.

Nach der gegebenen Auflösung hat man die Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. der kleinern Zahl, von den Einern, Zehnern, Hundertern ꝛc. der grössern Zahl subtrahirt. Die hierdurch erhaltene Zahl zeigt also wie viel die grössere von den gegebenen Zahlen grösser ist, als die kleinere, folglich ist sie die verlangte Differenz (§. 25.).

Grundsaz.

§. 29. Wenn man zu einer Grösse oder Zahl eine andere addirt und eben dieselbe Zahl von der Summe wieder subtrahirt; oder wenn man von einer Grösse oder Zahl eine andere subtrahirt und eben dieselbe Zahl zu der Differenz addiret: so bleibt in beiden Fällen die erste Grösse oder Zahl ungeändert *).

Beispiele.

1. $a + b - b = a$ oder $6 + 4 - 4 = 6$
2. $a - b + b = a$ — $6 - 4 + 4 = 6$

Anmer-

*) Dieser Grundsaz folgt unmittelbar aus den Begriffen vermehren und vermindern.

Anmerkung.

Auf diesen Saz gründet sich die so genannte **Probe** für die Addition und Subtraktion *).

1. Probe der Addition.

Man subtrahirt nemlich von der erhaltenen Summe als das Ganze betrachtet (§. 9.), alle ihre Theile, einen ausgenommen: so muß, wenn richtig gerechnet ist, die lezte Differenz, dem von der Subtraktion ausgenommenen Theile gleich sein.

Es sei das Beispiel §. 24.

4 5 0 9 8 7 5		
2 4 3 7 9 4 3	=	c
4 7 5 6 7 2 8	=	b
9 4 0 1 5 3 6	=	a
2.1.1 0 6.0 8.2		Summa
9 4 0 1 5 3 6	=	a
1.1.7.0.4.5 4.6		
4 7 5 6 7 2 8	=	b
6 9 4.7.8.1 8		
2 4 3 7 9 4 3	=	c
4 5 0 9 8 7 5		lezte Differenz

2. Probe der Subtraktion.

Man addirt die Differenz zu der kleinern Zahl, so muß die Summe der grössern gleich sein.

Es sei das Beispiel §. 28. N. 5.

690000045
124578953
565421092
690000045

3. Mul-

*) Mehrere Arten von Proben für die Addition und Subtraktion hier anzumerken, würde unnöthig sein. Man gewöhne sich **richtig** zu rechnen, so kann man alle Proben entbehren.

3. Multiplikation.

Erklärung.

§. 30. Die Multiplikation ist nach §. 7. nichts anders als eine abgekürzte Addition für den Fall, wenn eine Zahl mehreremale zu sich selbst addirt werden soll und lehrt also aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche eine von den gegebenen so vielmal enthält, als in der andern Einheiten enthalten sind. Die Zahl, welche man durch die Multiplikation erhält, wird das Produkt genannt. Von den gegebenen Zahlen heißt die eine das Multiplikandum und die andere der Multiplikator. Also das Multiplikandum ist im Produkte so vielmal enthalten, als 1 im Multiplikator.

Man nennt auch das Multiplikandum und den Multiplikator zusammen die Faktoren und dann heißt das Produkt das Faktum.

Das Zeichen, durch welches die Multiplikation blos angezeigt wird, ist ein liegendes Kreuz, zum Unterschiede von dem Zeichen der Addition (×) oder an dessen Stelle ein Punkt (.). Eins von diesen Zeichen sezt man zwischen die Faktoren. *) Z. B. 6×8 oder 6.8. d. i. 6 multiplicirt mit 8. Sind die Faktoren durch die Addition oder Subtraktion, oder durch beide zugleich, zusammengesezt, so bringt man die Faktoren in Parenthesen und zwischen die Parenthesen sezt man das Zeichen der Multiplikation. Z. B.

$(6+4)$

*) Bezeichnet man allgemein das Multiplikandum M, den Multiplikator m, und das Produkt P; so ist $M.m = P$ oder $P = M.m$.

$(6+4)\times 5$ oder $(6+4).5$, d. i. 10×5 oder 10.5. Auch $(8-2)\times 4$ oder $(8-2).4$, d. i. 6×4 oder 6.4. Ferner $(12+2)\times(8+3)$ oder $(12+2).(8+3)$ d. i. 14×11 oder 14.11. So auch $(12-2)\times(8-3)$ oder $(12-2).(8-3)$, d. i. 10×5 oder 10.5. Endlich $(8+5-3)\times(6+4-2)$ oder $(8+5-3).(6+4-2)$, d. i. 10×8 oder 10.8.

Grundsäze.

§. 31. 1. Wenn man gleiche Grössen oder Zahlen mit gleichen Zahlen multiplicirt, so sind die Produkte gleich.

2. Wenn aber die Multiplikanda ungleich, die Multiplikatoren hingegen gleich sind: so giebt das grössere Multiplikandum auch das grössere Produkt.

3. Um so mehr ist das Produkt des grössern mit dem grössern, grösser, als das Produkt des kleinern mit dem kleinern (§. 22.).

Beispiele.

Zu N. 1. $\begin{array}{c} 8=4.2 \\ 6=3.2 \\ \hline 8.6=4.2.3.2 \end{array}$ oder $\begin{array}{c} a=c.e \\ d=f.g \\ \hline a.d=c.e.f.g \end{array}$

Zu N. 2. $\begin{array}{c} 8>6 \\ 4=4 \\ \hline 8.4>6.4 \end{array}$ oder $\begin{array}{c} a>b \\ m=m \\ \hline a.m>b.m \end{array}$

Zu N. 3. $\begin{array}{c} 12>10 \\ 8>5 \\ \hline 12.8>10.5 \end{array}$ oder $\begin{array}{c} a>b \\ m>n \\ \hline a.m>b.n \end{array}$

lehr-

Lehrsaz.

§. 32. Sind beide Faktoren ganze Zahlen, so geben sie einerlei Produkte, wenn man sie auch verwechselt, d. i. die erste Zahl mit der zweiten, oder die zweite mit der ersten multiplicirt.

Beweis.

Es sei der eine Faktor 4 und der andere 3: so ist das Produkt $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$. Denn man bezeichne einmal beide Zahlen mit Sternchen, und zwar iede mit so vielen als sie Einheiten enthält, und seze das Multiplikandum in eine Reihe von a nach b, und so vielmal unter sich selbst von a nach c, als der Multiplikator Eins enthält.

a * * * * b
 * * * *
c * * * *

So ist die Summe aller dieser Sternchen so groß als das Produkt $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$. Die Reihe von a nach b ist so vielmal genommen, als die Reihe von a nach c Eins enthält. Nimmt man aber die Reihe von a nach c so vielmal als die Reihe von a nach b Eins enthält, so hat man ebenfalls dieselbe Menge, nehmlich $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4$. Sezt man die Reihe von a nach $b = M$, und die von a nach $c = m$, so ist die Menge der Einheiten $M \cdot m$ oder $m \cdot M$, also auch $M \cdot m = m \cdot M$, (§. 31. N. 1.) folglich $4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ oder $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$.

1. Zusaz.

Daraus folgt, wenn auch mehrere Faktoren mit einander multiplicirt werden sollen, daß man die Ordnung, in welcher sie auf einander folgen, auf alle mögliche Art verändern kann, ohne daß die Produkte ungleich wer-

den. Z. B. 4 . 5 . 7 . 8 = 5 . 7 . 8 . 4 = 7 . 8 . 5 . 4 = 8 . 7 . 5 . 4. rc.

2. Zusaz.

Da das Produkt die Reihe von a nach b so oft enthält, als Einheiten von a nach c vorhanden sind, und so auch umgekehrt §. 32., so folgt überhaupt: **das Produkt enthält einen Faktor so oft in sich, als der andere die Einheit.**

Forderungssaz.

§. 33. Das Produkt zweier Zahlen, wenn keine von beiden grösser als 9 ist, kann man leicht durch die Addition finden. Man schreibe nehmlich das Multiplikandum so vielmal unter sich selbst, als der Multiplikator Eins enthält, und addire die Zahlzeichen, so ist die Summe das verlangte Produkt (§. 30). Als eine Art von Abkürzung kann man die grössere Zahl für das Multiplikandum und die kleinere für den Multiplikator nehmen, weil es einerlei ist, in welcher Ordnung die Faktoren gesezt werden (§. 32.).

Beispiel.

Die beiden Zahlen sind 8 und 4. Wenn 8 das Multiplikandum und 4 der Multiplikator ist; so ist

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ \hline 32 \end{array} \text{ das Produkt } = 8 . 4 = 4 . 8$$

Erklärung.

§. 34. Da das Verfahren nach dem vorigen §. beim Gebrauche viel zu weitläuftig ist, so kann man ein

für

für allemal alle Produkte der einfachen Zahlen von 1 bis 9, die man als Faktoren ansieht, vermittelst der Addition suchen. Man schreibe daher die Zahlen von 1 bis 9 nach einander hin und addire iede zu sich selbst, so erhält man das zweifache. Zu dem zweifachen addirt man die einfachen Zahlen und erhält das dreifache. Sezt man auf diese Art die Addition fort, so findet man das vierfache, fünffache, sechsfache, siebenfache, achtfache und neunfache. Hieraus entsteht folgende Tabelle, die man der leichtern Uebersicht wegen in Fächer theilen kann, da denn iedes Produkt sein eigen Fach bekommt. Jeder Faktor in der Reihe von a nach b kann als das Multiplikandum und ieder Faktor in der Reihe von a nach c als der Multiplikator angesehen werden, und umgekehrt.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	b
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
c	9	18	27	36	45	54	63	72	81	

oder abgekürzet

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	9	12	15	18	21	24	27
		4	16	20	24	28	32	36
			5	25	30	35	40	45
				6	36	42	48	54
					7	49	56	63
						8	64	72
							9	81

Gebrauch dieser Tabelle.

Will man z. B. das Produkt 7.5 = 5.7 wissen, so sucht man 7 in der obern Reihe und geht in der Reihe zur linken herunter bis man zu 5 kommt, geht alsdenn von 7 gerade in der Reihe herunter bis man an die fünfte Reihe ist; von der Zahl 5 geht man zur Rechten fort bis in die siebente Reihe, so trift man in einem Fache zusammen, in welchem das Produkt 35 = 7.5 stehet, und dies ist das verlangte Produkt. Wählt man aber in der obern Reihe 5, so muß man in der Seitenreihe zur linken 7 suchen und auf die vorige Art verfahren, so findet man ebenfalls das Produkt 35 = 5.7.

Diese Tabelle oder Tafel heißt von ihrem Erfinder der Pythagorische Rechentisch und ist mit dem bekannten Einmaleins einerlei*).

1. Zu=

*) Außer dem Pythagorischen Rechentische kann man sich bey der Multiplikation und Division der Nepperschen Stäbchen mit

1. Zusaz.

Eine Zahl multiplicirt man mit 10, wenn man zur Rechten eine Null anhängt (§. 18. Zus.). Aus eben diesem Grunde wird eine Zahl mit 100, 1000 ꝛc. multiplicirt, wenn man an sie zur Rechten zwei, drei ꝛc. Nullen sezt. Denn man kann sich denken, daß z. B. 50 aus 5 . 10; 500 aus 5 . 100; 5000 aus 5 . 1000 ꝛc. entstanden sei. Ferner 5470 aus 547 . 10; 54700 aus 547 . 100 ꝛc. also auch 600 . 4 = 6 . 100 . 4 = 6 . 4 . 100 = 24 . 100 = 2400; und 600 . 40 = 6 . 100 . 4 . 10 = 6 . 4 . 100 . 10 = 24 . 1000 = 24000. Ferner 45200 . 34000 = 452 . 100 . 34 . 1000 = 452 . 34 . 100 . 1000 = 452 . 34 . 100000 (§. 32. Zus.). Folgende Regel enthält das Verfahren in der Allgemeinheit. Wenn die Faktoren Zahlen mit angehängten Nullen sind: so

mit Vortheile bedienen, denn durch ihren Gebrauch wird die Multiplikation in Addition und die Division in Subtraktion verwandelt. Der schottländische Baron Nepper hat die Einrichtung und den Gebrauch derselben in dem Buche Rhabdologia beschrieben. Mehrere andere Schriftsteller beschreiben sie ebenfalls und geben ihren Gebrauch an. Hederich in seinen Nebenübungen der Arithmetik v. IV. Aufg. I. handelt hiervon sehr umständlich. Ludolph von Ceuln hat eine noch einfachere Methode die Multiplikation in Addition ohne Hülfe der Nepperschen Stäbchen ꝛc. zu verwandeln gezeigt. In einem Lehrbuche, in welchem die Theorie nebst den nöthigsten Anwendungen der Arithmetik in der gedrängtsten Kürze vorgetragen wird, sucht man umständliche Beschreibungen erwähnter und anderer Rechnungsvortheile vergebens. Wer das Einmaleins nicht im Kopfe hat, wird in der Arithmetik langsame Fortschritte machen und wer Theorie und nöthige Anwendungen weiß, wird sich selbst Vortheile verschaffen, die zu beschreiben vom Zwecke abführen. — Wer Zeit und Lust hat, sich mit dergleichen Erfindungen zu beschäftigen, die immer von der Reichhaltigkeit der Theorie und dem Scharfsinne ihrer Erfinder zeugen, findet in den angeführten Schriften hinlänglichen Unterricht.

so multiplicire man die Zahlen nach §. 34., und seze an das Produkt so viele Nullen, als beiden Faktoren zusammen genommen angehängt waren.

2. Zusaz.

Bestehet das Multiplikandum aus mehrern Theilen, und man nimmt ieden Theil so vielmal als der Multiplikator 1 enthält; so ist dieses eben so viel, als wenn man das ganze Multiplikandum eben so vielmal genommen hätte (§. 12.). Wenn man daher die Partialprodukte in eine Summe bringt, so ist diese so groß, als das auf die lezte Art gefundene ganze Produkt. Es ist klar, daß $(2 + 6) . 5 = 2 . 5 + 6 . 5$, weil im ersten Falle $8 . 5 = 40$ (§. 34.) und im andern Falle ebenfalls $10 + 30 = 40$ ist (§. 34. und 24.).

Aufgabe.

§. 35. Eine zusammengesezte Zahl mit einer einfachen zu multipliciren.

Auflösung.

1. Man seze den Multiplikator unter die Einer des Multiplikandi, und ziehe wie bei der Addition einen Strich, unter welchen das Produkt gesezt werden kann.
2. Nun multiplicire man die Einer des Multiplikandi mit dem Multiplikator, und so fort die Zehner, Hunderter ꝛc. nach §. 34. Enthält das Produkt der Einer einen oder mehrere Zehner, so seze man blos die Einer in die Stelle des Produkts unter die Einer des Multiplikandi, die Zehner aber behalte man in Gedanken und addire sie zu dem Produkte der Zehner. Eben so verfahre man bei den Produkten der Zehner, der Hunderter ꝛc.

Bei=

Beispiel.

Es sei das Multiplikandum 23416 = a
der Multiplikator 2 = b; so ist
das Produkt a . b = 23416 . 2

23416 = a		654978
2 = b	oder	9
46832 = a . b		5894802

Nach der Theorie müste man eigentlich so verfahren:

23416 = a
2 = b

12	Partialprodukte
20	
800	
6000	
40000	
46832	Summe = a . b

Beweis.

Aus dem Verfahren des nach der Theorie behandelten Beispiels sieht man deutlich, daß alle Einer, Zehner, Hunderter ꝛc., welche die Theile des Multiplikandi ausmachen, so vielmal genommen sind, als der Multiplikator Einheiten enthält (§. 34. Zus. 2.). Da nun alle Theile zusammen genommen für das Ganze gesezt werden können (§. 9.); so folgt, die gefundene Zahl enthält das Multiplikandum so oft als der Multiplikator 1, daher ist sie das verlangte Produkt (§. 30.).

Aufgabe.

§. 36. Zwei aus einfachen Zahlzeichen zusammengesezte Zahlen zu multipliciren.

Auflösung.

1. Man schreibe das Multiplikandum und den Multiplikator nach den Decimalordnungen wie bei der Addition unter einander, und multiplicire das Multiplikandum mit den Einern, Zehnern, Hunderten ꝛc. des Multiplikators nach einander, und seze die erhaltenen Produkte in ihre Stellen untereinander, so, daß das Produkt des Multiplikandi mit den Einern des Multiplikators oder die erste Reihe in die erste Stelle unter das Multiplikandum von der Rechten gegen die Linke, das Produkt mit den Zehnern oder die zweite Reihe in die zweite Stelle, das Produkt mit den Hunderten oder die dritte Reihe in die dritte Stelle ꝛc. zu stehen komme.
2. Die erhaltenen Partialprodukte addire man; so ist die Summe das gesuchte Produkt.
3. Kommen im Multiplikator in der Mitte eine oder mehrere Nullen vor, so übergehe man sie, anstatt daß man sonst die ganze Reihe mit Nullen anfüllen müste, seze aber das folgende Produkt so viele Stellen weiter zur Linken, als Nullen hinter einander vorkommen, damit es seinen Werth nicht verliere.
4. Haben beide Faktoren am Ende Nullen, so nimmt man während der Multiplikation auf sie keine Rüksicht, hängt aber an das Produkt rechter Hand so viele Nullen, als beide Faktoren zusammen genommen enthalten (§. 34. 1. Zus.).

Beispiele.

```
  205316              456238
     124               24005
  ------         -----------
  821264             2281190
 410632           1824952
205316            912476
--------         -----------
25459184         10951993190
```

Anstatt

	Anstatt
45200 (§. 34. 1 Zus.)	456238
34000	24005
1808	2281190
1356	000000
1536800000	000000
	1824952
	912476
	10951993190

Der Beweis wird auf die nehmliche Art wie in §. 35. geführt.

4. Division.

Erklärung.

§. 37. Die Division ist nach §. 7. eine Subtraktion, für den Fall, wenn eine Zahl um so viel vermindert werden soll, als die andere Einheiten enthält; daher lehrt die Division eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft die eine von zwei gegebenen Zahlen in der andern enthalten sei. Die Zahl, welche dividirt werden soll, nennt man das Dividendum, und die, womit man dividirt, den Divisor; diejenige aber, welche durch die Menge ihrer Einheiten angiebt, wie vielmal der Divisor im Dividendo enthalten ist, wird der Quotient genannt.

Das Zeichen, durch welches man die Division anzeigen kann, sind zwei übereinanderstehende Punkte (:) und wird zwischen das Dividendum und den Divisor gesezt, oder ein Strich, da das Dividendum über und der Divisor unter denselben zu stehen kommt. Bei-

de werden durch dividirt ausgedrükt. Der Ausdruk 12 : 4 oder $\frac{12}{4}$ ist so viel als 12 dividirt durch 4.

Sind das Dividendum oder der Divisor oder beide zugleich durch + oder — verbundene Zahlen, so werden sie in eine Parenthese gesezt, zwischen beide aber das Divisionszeichen.

So ist $(12 + 3 + 6) : 7 = 21 : 7$ und $(16 + 8 - 3) : (2 + 5) = 21 : 7$. xc.

1. Zusaz.

Vergleicht man die Division mit der Multiplikation, so findet sich, daß man das Dividendum als das Produkt, den Divisor als das Multiplikandum und den Quotienten als den Multiplikator ansehen kann (§. verglichen mit §. 30). Multiplicirt man also den Quotienten mit dem Divisor, so erhält man im Produkte das Dividendum.

Daß dies den Begriffen der Multiplikation und Division gemäß ist, kann man aus §. 7. sehen. Daraus folgt: Wenn man eine Zahl mit einer andern dividirt und den erhaltenen Quotienten mit eben derselben Zahl wieder multiplicirt, so erhält man die erste Zahl oder das Dividendum wieder; und umgekehrt *).

2. Zusaz.

Aus der bei der Multiplikation erwähnten Eigenschaft des Produkts (§. 32. 2. Zus.) folgt auch, daß der Quotient so oft im Dividendo enthalten sein muß, als der Divisor 1 enthält. Man kann sich vorstellen als ob das Divi-

*) Bezeichnet man allgemein das Dividendum mit D, den Divisor mit d und den Quotient mit Q; so ist $D : d = Q$ oder $Q = D : d$, und $d = d$, also auch $Q . d = D$.

Dividendum aus lauter gleichen Theilen bestehe, deren ieder dem Quotienten gleich ist, und daß der Divisor die Menge dieser gleichen Theile durch seine Einheiten anzeige. Daher heißt auch dividiren: Eine Zahl (Dividendum) in so viele gleiche Theile theilen, als die andere (Divisor) Einheiten enthält und einen dieser Theile (Quotient) bestimmt angeben *).

Grundsäze.

§. 38. 1. Wenn man gleiche Grössen oder Zahlen mit gleichen dividirt, so erhält man gleiche Quotienten.

2. Sind die Dividenda ungleich, die Divisoren aber gleich, so giebt das grössere Dividendum einen grössern Quotienten als das kleinere.

3. Sind hingegen die Dividenda gleich, und die Divisoren ungleich, so giebt der grössere Divisor den kleinern Quotienten (§. 26.).

Beispiele.

Zu N. 1.

$$\frac{24 = 8.3 \qquad 4 = 2.2}{24:4 = 8.3:2.2} \quad \text{oder} \quad \frac{D = D \qquad d = d}{D:d = D:d}$$

Zu

*) Bei diesem Begriffe der Division denkt man sich das Dividendum und den Divisor von einerlei Art z. B. $\frac{15 \text{ Rthlr.}}{3 \text{ Rthlr.}}$ nicht aber $\frac{15 \text{ Gr.}}{3 \text{ Rthlr.}}$, folglich paßt der Begrif eigentlich auf die Division in genannten Zahlen, ob er gleich ebenfalls auch für ungenannte Zahlen gelten kann. Beide Arten der Division nehmlich die in §. 37. und die im 2 Zusaze sind nur in Ansehung der Frage und der Bestimmung verschieden. Im ersten Falle §. 37.

Zu N. 2. $\frac{\begin{matrix} 24 > 6.2+4 \\ 8 = 4.2 \end{matrix}}{24:8 > (6.2+4):4.2}$ oder $\frac{\begin{matrix} D > E \\ d = d \end{matrix}}{D:d > E:d}$

Zu N. 3. $\frac{\begin{matrix} 24 = 6.4 \\ 8 > 6 \end{matrix}}{24:8 < 6.4:6}$ oder $\frac{\begin{matrix} D = D \\ d > e \end{matrix}}{D:d < D:e}$

Grundsaz.

§. 39. Wenn das Dividendum einerlei bleibt, und der Divisor 2mal, 3mal ꝛc. kleiner genommen wird; so wird der Quotient 2mal, 3mal ꝛc. grösser und umgekehrt. Demnach ist der Quotient 12 : 3 2mal grösser als 12 : 6 ꝛc.; auch umgekehrt der Quotient 12 : 6 2mal kleiner als 12 : 3 ꝛc.

Grundsaz.

§. 40. Eine Zahl, die aus mehreren Theilen bestehet, wird mit einer andern Zahl dividirt, wenn man alle Theile für sich mit dem gegebenen Divisor dividirt und zulezt alle einzelne Quotienten addirt (§. 12).

Beispiel.

Man denke sich das Dividendum $428 = 400 + 20 + 8$ und den Divisor 4; so ist $428 : 4 = (400 + 20 + 8) : 4 = 400 : 4 + 20 : 4 + 8 : 4$.

For-

§. 37. ist der Quotient eine ungenannte Zahl, im andern Falle aber im 2 Zusaz bekommt der Quotient den Namen des Dividendi, wenn die Rede von genannten Zahlen ist. Uebrigens ist das Verfahren in beiden Fällen gleich.

Forderungssaz.

§. 41. Den Quotienten zweier Zahlen, wenn keine von beiden grösser als 9 oder 2mal 9 ist, kann man vermittelst der Subtraktion finden.

Beispiel.

Es sei das Dividendum 16, und der Divisor 4,

so ist 16
— 4
12
— 4
8
— 4

Quotient 4 = 16 : 4.

Aufgabe.

§. 42. Das Dividendum bestehet aus zwei, der Divisor nur einem Zahlzeichen, man soll den Quotienten finden.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn der Divisor grösser ist als das höchste Zahlzeichen im Dividendo, so kann der Quotient nicht grösser als 9 sein. Soll 65 wie hier zur Seite mit 8 div. werden, so kann der Quotient nicht 10 sein, weil 8.10 schon 80 macht (§. 34.). Man findet durch Hülfe der Pythagorischen Tafel leicht, wie vielmal der Divisor im Dividendo enthalten ist, denn man darf nur den Divisor 8 zur Linken in der Reihe aufsuchen und in der obern Reihe Achtung geben, welches Zahlzeichen mit dem Divisor

8) 65 | 8
64

oder

8) 60 | 7
56

sor ein Produkt giebt, entweder eben so groß als das Dividendum, oder ihn unter den kleinern am nächsten kommt. Findet man ein Produkt, welches dem Dividendo gleich ist, so sagt man, der Divisor gehe im Dividendo auf, wie in dem zur Seite stehenden Beispiele. Ist aber das Produkt des Divisors mit dem Quotienten kleiner als das Dividendum, so sezt man es, wie in der vorgeschriebenen Form geschehen, unter das Dividendum, subtrahirt und sezt den Rest unter den Strich. Der Rest zeigt, daß das Dividendum den Divisor nicht nur etlichemal ganz, sondern auch noch einen Theil desselben darüber enthalte. Die Lehre von den Brüchen wird davon mehr Nachricht geben.

```
9) 72|8
   72
   --

9) 67|7
   63
   --
    4 Rest
```

Zweiter Fall. Wenn der Divisor kleiner oder eben so groß ist, als das höchste Zahlzeichen im Dividendo, und das niedrigste des leztern o ist, so suche man den Quotienten wie vorhin, aber nur für das höchste Zahlzeichen des Dividendi, und seze an den Quotienten zur Rechten, eben so auch an das Produkt eine o und subtrahire. Bleibt ein Rest, so dividirt man den Rest mit dem Divisor, sezt den Quotienten unter die o, und addirt beide gefundene Theile desselben. Die Beispiele werden das Verfahren deutlich machen.

```
4) 80|20
   80
   --
    0

4) 90|20
   80  2
   --  --
4) 10  22 Q.
    8
   --
    2 Rest
```

Dritter Fall. Wäre bei den Bedingungen des zweiten Falles das niedrigste Zahlzeichen im Dividendo nicht o, so müste man doch auf eine ähnliche Art verfahren; nehmlich

4) 75

4) 75	10		2) 38	10
40	8	oder	20	9
4) 35	18		2) 18	19
32			18	
3			0	

Beweis.

Vermöge des angegebenen Verfahrens sind die Einer im ersten Falle und die Einer und Zehner im zweiten und dritten Falle, woraus die gefundene Zahl bestehet, mit dem Divisor in der gehörigen Ordnung multiplicirt und die erhaltenen Produkte von dem Dividendo subtrahirt. Diese einzelnen Produkte sind zusammen genommen dem Dividendo (die Fälle ausgenommen, wo ein Rest geblieben) gleich. Da nun durch die Theile des Dividendi das Dividendum selbst dividirt und die Theile der gefundenen Zahl ebenfalls nach einander anstatt der ganzen Zahl mit dem Divisor multiplicirt und dem Dividendo gleich sind, so ist die gefundene Zahl der verlangte Quotient (§. 37.).

Zusaz.

Das Verfahren bei den lezten beiden Fällen im §. ist etwas zu weitläuftig; man kann den Quotient, wenn auch das Dividendum mehr als zwei Zahlzeichen hat, kürzer finden, indem man denselben für iedes Zahlzeichen des Dividendi einzeln sucht und die Theile des Quotienten gleich neben einander in eine Reihe sezt. Den Divisor darf man auch nur einmal zur Seite schreiben, so kann er bis zu dem Ende der Rechnung gebraucht werden. Im folgenden Beispiele kann man sich von der Art des Verfahrens vollständig unterrichten.

```
6) 2782692 | 463782
   24
   --
    38
    36
    --
     22
     18
     --
      46
      42
      --
       49
       48
       --
        12
        12
        --
         0
```

Der Beweis läßt sich ebenfalls kürzer auf folgende Art führen. Weiß man, durch Hülfe der Multiplikation §. 34. ꝛc. daß 6 in 2782692 so viele mal enthalten ist, als die Zahl 463782 durch ihre Einheiten angiebt; so folgt, es ist $6 . 463782 = 463782 . 6 = 2782692$ (§. 32.). Demnach ist 463782 der 463782ste Theil von 2782692, oder die Zahl 463782 ist der verlangte Quotient (§. 37) *).

Aufgabe.

§. 43. Jede vorgelegte Zahl mit einer kleinern Zahl zu dividiren.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn das Dividendum und der Divisor gleich viele Zahlzeichen haben, so suche man den Quo-

*) Im folgenden werden die Beweise mehr durch allgemeinere Zeichen als durch Wörter geführt werden, weil es auch Anfängern leichter wird dergleichen kurzgefaßte Beweise zu übersehen, und zu fassen, wie dies die Erfahrung lehret.

Quotienten eben so als wenn alle Zahlzeichen die höchsten ausgenommen, Nullen wären. Multiplicire den Quotienten mit dem Divisor (§. 42.), so zeigt sich, ob ein Rest bleibt oder nicht. Bleibt ein Rest, so muß er kleiner sein als der Divisor, sonst hat man den Quotienten zu klein genommen.

Beispiele.

245) 980 | 4
     980 |

       0

278) 981 | 3
     834 |
     ---
     147 < 278

Zweiter Fall. Wenn das Dividendum ein Zahlzeichen mehr, als der Divisor hat, der Divisor aber grösser ist, als das höchste Zahlzeichen im Dividendo; so nehme man die zwei höchsten Zahlzeichen im Dividendo und das höchste im Divisor allein, und suche den Quotienten auf die Art, als wenn alle übrige Zahlzeichen Nullen wären, multiplicire den Quotienten mit dem Divisor wie im ersten Falle und subtrahire das erhaltene Produkt vom Dividendo wie im folgenden Beispiele.

5693) 47653 | 8
      45544 |

       2109

Wäre der Divisor eben so groß oder kleiner als das erste Zahlzeichen und das Dividendum bestünde aus mehr Zahlzeichen als der Divisor; so lasse man das niedrigste im Dividendo anfangs weg und verfahre wie vorhin. Zum Reste rüke man das lezte Zahlzeichen des Dividendi und wiederhole das Verfahren, so findet man auch das zweite Zahlzeichen des Quotienten.

```
47936) 745963 | 15
       47936
       266603
       239680
        26923
```

Dritter Fall. Wenn die Anzahl der Zahlzeichen im Dividendo die Anzahl der Zahlzeichen im Divisor um mehrere übertrift; so findet man die Theile des Quotienten, mithin den ganzen Quotienten, wenn man die bisher gegebenen Regeln beobachtet. Sollte einmal der Rest und das aus dem Dividendo heruntergenommene Zahlzeichen zusammengenommen kleiner sein, als der Divisor, so wird der Quotient 0. Da nun das Produkt des Divisors und des Quotienten, wenn er 0 ist, ebenfalls eine Reihe Nullen geben würde, so lasse man alles ungeändert, rüke das folgende Zahlzeichen im Dividendo herunter und suche den folgenden Theil des Quotienten. Folgendes Beispiel mag zu einem Muster dienen *).

```
359241) 4705698764 | 13099
        359241
        1113288
        1077723
          3556576
          3233169
           3234074
           3233169
               905 < 359241.
```

1. Zu=

*) Mehrere Arten das Dividiren abzukürzen zu berühren, scheint nicht rathsam zu sein, zumal in einem Lehrbuche, welches die Gründe des Verfahrens überdieß nur kurz angeben kann. Wer sich mit andern Methoden bekannt machen will, findet in jedem gemeinen Rechenbuche Unterricht. Die beschriebene Art zu dividiren

1. Zusaz.

Wenn der Divisor 10 ist und das Dividendum enthält zur Linken mehrere Nullen, so hat man dividirt, wenn man im Dividendo die niedrigste Null wegstreicht. Ist der Divisor 100, 1000 2c., so nimmt man von dem Dividendo linker Hand so viele Nullen weg, als der Divisor hat. Denn nach §. 34. 1. Zus. ist 526000 = 52600 . 10. Soll nun 526000 mit 10 dividirt werden, so ist 526000 : 10 = 52600 . 10 : 10, folglich bekommt die Zahl 526000 durch 10 dividirt eine Null weniger = 52600. Daß die Regel allgemein ist, sieht man leicht aus dem angeführten §.

Haben beide das Dividendum und der Divisor eine gleiche Anzahl Nullen und das den Nullen im Divisor voranstehende Zahlzeichen ist 1: so ist der Quotient die den Nullen des Dividendi voranstehende Zahl. Z. B. 526000 : 1000 = 526.

Enthält das Dividendum mehr Nullen als der Divisor, so erhält der Quotient die Zahl des Dividendi weniger so viele Nullen als der Divisor hat. Ist 78650000 das Dividendum und 1000 der Divisor: so ist der Quotient 78650.

2. Zusaz.

Ist der Divisor 1 mit einer Reihe deranhängender Nullen, und des Dividendums lezte Zahlzeichen sind keine Nullen, so schneidet man dem Dividendo von der Rechten gegen die Linke so viele Zahlzeichen ab, als der Divisor Nullen hat; diese machen den Rest aus, was aber zur Linken

diren ist aus dem Grunde jedem Anfänger zu empfehlen, weil man sich ähnlicher Divisionen bei der Extraktion der Quadrat- und Kubikwurzeln bedient. Die Erfahrung lehrt, daß man, an andere Arten die Division zu verrichten gewöhnt, bei jenen Berechnungen Anstoß findet.

Linken des Abschnittes steht, ist der Quotient. Soll man z. B. 45369 mit 1000 dividiren: so stellt man sich vor, die Zahl 45369 sei durch die Addition der Zahlen 45000 + 369 entstanden, oder 45369 = 45000 + 369. Nun ist (45000 + 369) : 1000 = 45000 : 1000 + 369 : 1000 und 45000 : 1000 = 45 (1 Zus.); so ist 45000 : 1000 + 369 : 1000 = 45 + 369 : 1000; also auch 45369 : 1000 = 45 + 369 : 1000; folglich besteht der Quotient aus 45 + 369 : 1000. Diesemnach sollte 369 noch durch 1000 dividirt werden, da dies aber nicht angeht, so ist 369 der Rest. Die Division müste also auf folgende Art verrichtet werden.

1000 | 45 | 369 | 45 der Qotient,
000

dem der Rest 369 noch hinzugefügt werden muß, der aber nur alsdann erst ein Theil des Quotienten wird, wenn man ihn durch den Divisor dividirt.

3. Zusatz.

Nach eben den angeführten Gründen lassen sich auch folgende Fälle behandeln.

1. Wenn das Dividendum am Ende keine, der Divisor aber mehrere Nullen hat und sein höchstes Zahlzeichen nicht Null ist, so dividire man mit dem Divisor das Dividendum, nachdem man zuvor von dem Dividendo zur Rechten so viele Zahlzeichen abgeschnitten, als der Divisor am Ende Nullen hat, die den Rest ausmachen. Nämlich:

```
24) 456 | 724 | 19
    24  | 000
    ---
    216
    216
    ---
     0
```

oder

oder

```
12) 4283 | 51 | 356
    36   | 00
    --
     68
     60
     --
      83
      72
      --
      11   also der Rest 1151
```

2. Endigen sich beide das Dividendum und der Divisor mit einer gleichen Anzahl Nullen und der Divisor hat vor diesen Stellen noch ein oder mehrere Zahlzeichen, so nimmt man in beiden die gleiche Anzahl Nullen weg und dividirt übrigens wie gewöhnlich.

```
6) 354|00 | 59
   30 |00
   --
    54
    54
    --
     0
```

Bliebe in diesem Falle ein Rest, so müßte man demselben die im Dividendo abgeschnittenen Nullen zufügen.

```
6) 357 | 00 | 59
   30  | 00
   --
    57
    54
    --
der Rest 300
```

3. Befinden sich ausser den vorigen Bedingungen am Dividendo zu Ende mehr Nullen als am Divisor, so nehme man vom Dividendo nur so viele weg, als der Divisor hat und dividire wie vorhin.

```
15) 43780|00 | 2918
     30   |00
    ---
    137
    135
    ---
      28
      15
     ---
      130
      120
     ----
       1000
```

4. Hat aber das Dividendum weniger Nullen am Ende wie der Divisor, so schneide man so viele Nullen und andere Zahlzeichen im Dividendo ab, als der Divisor Nullen hat und dividire, wenn der Divisor nicht 1 ist wie oben

```
2) 125|600 | 62
   12 |000
   --
     5
     4
    --
    1600
```

4. Zusaz.

Multiplikation und Division dienen einander zur Probe, weil die Begriffe vermehren und vermindern entgegengesezte Begriffe sind (§. 7.) *).

1. Probe der Multiplikation. Dividirt man das Produkt durch einen Faktor, so muß der andere der

*) Nimmt man die in §. 30. *) und §. 37. *) angegebenen allgemeinen Zeichen, so kann man die Probe der Multiplikation und Division ganz allgemein angeben. $P : m = M$. oder $P : M = m$ und $M . m = P$. Eben so wenn man zu ienen Zeichen noch für den Rest sezt, im Falle die Division nicht aufgeht, so ist $D = Q . d + r$ und $\frac{D}{d} = Q + \frac{r}{d}$ oder $D : d = Q + r : d$.

der Quotient werden. Im Gegentheile sind Fehler beim Multipliciren oder Dividiren vorgefallen. Es sei 24 das Multiplikandum, 6 der Multiplikator; so ist das Produkt 144. Also

```
6) 144 | 24      oder      24) 144 | 6
   12                          144
   --                          ---
    24                           0
    24
    --
     0
```

2. Probe der Division. Wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, so muß, wenn übrigens richtig gerechnet ist, das Produkt das Dividendum werden (§. 37. 1 Zus.). Wenn 980 das Dividendum, 245 der Divisor; so ist der Quotient 4. Folglich

```
    4                              245
  245                                4
  ---                              ---
   20      oder nach §. 33.        980
  16
  8
  ---
  980
```

Ist bei der Division ein Rest geblieben, so verfährt man nach der Regel: Man multiplicire den Quotienten mit dem Divisor, und addire zu diesem Produkte den Rest, so ist die Summe das Dividendum.

```
84) 45328 |  539
    420        84
    ---      ----
     332     2156
     252    4312
     ---    -----
      808   45276
      756     +52
      ---   -----
       52   45328
```

IV.

Von den
gebrochenen Zahlen oder Brüchen.

1. Von den Brüchen überhaupt.

Erklärung.

§. 44.

Wenn ein Ganzes in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und man von diesen gleichen Theilen einen oder mehrere nimmt, so erhält man in Vergleichung mit dem Ganzen, eine gebrochene Zahl, oder einen Bruch (§. 3.). So ist ein Drittheil eines Thalers ein Bruch, und ein Thaler das Ganze. Eben so kann man sagen: ein Gulden ist ein Bruch, wenn man den Thaler als das Ganze ansieht, denselben in drey gleiche Theile theilt, und zwei davon nimmt, die dem Werthe nach eben so viel betragen, als ein Gulden, obgleich beide Ausdrüke verschieden sind.

Um die Grösse eines Bruchs ausdrüken zu können, sind zwey Zahlen nöthig, wovon diejenige, welche angiebt, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt ist, der Nenner, diejenige aber, die durch ihre Einheiten bestimmt, wie viel solcher gleichen Theile genommen sind, der Zähler genannt wird.

Der Bruch enthält also keine Menge von Einheiten, aber demohnerachtet ist er eine Zahl; denn die gleichen Theile der Einheit, welche den Zähler angiebt, sind hier eben das, was die Einheiten bey den ganzen Zah-

Zahlen sind. Der Nenner giebt dem Bruche den Namen, daher können die Brüche überhaupt wie genannte Zahlen angesehen werden. Das Zeichen eines Bruches ist ein Strich wie bei der Division §. 37. Der Zähler wird über, der Nenner unter denselben geschrieben. So schreibt man z. B ein Drittheil eines Thalers $\frac{1}{3}$ Rthlr. wie überhaupt zwei Drittheile einer Zahl $\frac{2}{3}$ rc.

1. Zusatz.

Wenn zwei Brüche einerlei Namen oder Nenner haben, so sind die einzelnen Theile in beiden gleich groß, folglich kann man die Grösse derselben gegen einander nur nach den Zählern beurtheilen. Ist daher der Zähler des einen Bruchs 1 und der Zähler des andern eine iede andere beliebige Zahl: so enthält der lezte Bruch den ersten so vielmal, als der Zähler des ersten in dem Zähler des lezten enthalten ist. Also kann man den einen von zwei solchen Brüchen als die Einheit, den andern aber als das Ganze betrachten. So enthält z. B. der Bruch $\frac{5}{8}$ den Bruch $\frac{1}{8}$, wie man gleich sieht, 5 mal oder $\frac{5}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, und es ist $\frac{1}{8}$ die Einheit, $\frac{5}{8}$ aber das Ganze, oder $\frac{1}{8} . 5 = \frac{5}{8}$, da auch 5 die Zahl selbst und $\frac{1}{8}$ ihr Name heissen kann. Umgekehrt, wenn zwei Brüche einerlei Zähler haben, so beruhet die Beurtheilung ihrer Grösse auf der Grösse ihrer Nenner. So ist $\frac{5}{6}$ noch einmal so groß als $\frac{5}{12}$, also überhaupt von zwey Brüchen, die einerlei Zähler haben, ist derienige 2mal, 3mal rc. grösser, als der andere, dessen Nenner 2mal, 3mal rc. in dem Nenner des andern enthalten ist.

Also beruht die Grösse der Brüche bei einerlei Nenner auf der Grösse der Zähler, bei einerlei Zähler aber auf der Grösse der Nenner.

2. Zusatz.

Man kann einen von den gleichen Theilen des Ganzen (§. 44.) so oft nehmen, daß man die Grösse erhält, die dem Ganzen gleich, oder noch grösser als das Ganze ist. So sind $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$ ꝛc. so groß, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{5}$ ꝛc. aber grösser als das Ganze, also *unächte Brüche* (§. 44.). Die *eigentlichen* oder *ächten Brüche* sind daher von den *uneigentlichen* oder *unächten Brüchen* daran zu erkennen: der Zähler eines ächten Bruchs ist allemal kleiner, hingegen der Zähler eines unächten Bruches entweder eben so groß, oder grösser als der Nenner, folglich enthält ein unächter Bruch das Ganze entweder *ein-* oder *mehrere male* genau, oder noch *einige* Theile mehr. So ist $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{5}{5} = 1$ ꝛc. aber $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$, $\frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5}$. Diese Zahlen werden anstatt der unächten Brüche gewöhnlich auf diese Art geschrieben, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{4}{5}$ und *gemischte Zahlen* genannt, weil sie ganze und gebrochene Zahlen zugleich enthalten.

3. Zusatz.

Ein Bruch heißt im besondern Sinne ein genannter Bruch, wenn die Einheit desselben genannt ist, wie z. B. $\frac{1}{3}$ Rthlr.

Lehrsatz.

§. 45. Ein Bruch ist der Quotient, den man findet, wenn eine Zahl mit einer andern dividirt werden soll, so daß der Zähler das Dividendum, und der Nenner der Divisor ist.

Beweis.

Es ist $\frac{1}{3} = 1:3$, und $\frac{7}{9} = 7:9$.

Im ersten Falle ist für sich klar, daß wenn man 1 durch 3 dividirt, der Quotient $\frac{1}{3}$ ist, denn es heißt nichts an-

an-

anders, als die Einheit oder 1 in 3 gleiche Theile theilen, und einen davon nehmen (§. 44.). Nun aber ist der Ausdruk 1:3 nach (§. 37.) mit den gegebenen Begriffen einerlei, also ist $\frac{1}{3} = 1:3$.

Im zweiten Falle ist der Bruch $\frac{7}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$. Da nun nach dem ersten Falle $\frac{1}{3} = 1:3$, also auch $\frac{7}{9} = 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9$. Eben so ist der Quotient $7:9 = (1+1+1+1+1+1+1):9$ (§. 37.) oder nach §. 37. $= 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9$. Nun war $\frac{7}{9} =$ ebenfalls $1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9 + 1:9$, folglich ist $\frac{7}{9} = 7:9$ (§. 37.). So heißt der Ausdruk $\frac{6}{24}$ Rthlr. nichts, als 6 Rthlr. sollen in 24 gleiche Theile getheilt werden, und es ist $\frac{6}{24}$ Rthlr. $= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24} . 6 = 6$ Gr. Hieraus sieht man, daß der Saz allgemein für ieden andern Bruch gilt.

1. Zusaz.

Umgekehrt muß daher auch ganz allgemein **ieder Quotient einem Bruche gleich sein, dessen Zähler das Dividendum und dessen Nenner der Divisor ist.** Dennoch ist $25:6 = \frac{25}{6}$ oder $\frac{24}{6} + \frac{1}{6} = 4 + \frac{1}{6} = 4\frac{1}{6}$ (§. 44. Zus. 2.); daher ist die Bezeichnung der Brüche und der Division einerlei. Vergleicht man dieses mit den Fällen der Division, wo am Ende derselben ein Rest blieb, so sieht man leicht ein, daß man zwar den Quotienten in ganzen Zahlen genau gefunden, aber demselben noch ein Bruch hätte angehängt werden sollen, **dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor gewesen wäre.** Soll man daher wie im §. 42. 67:9, so ist der Quotient $= 7 + \frac{4}{9}$ oder $= \frac{67}{9}$.

2. Zu=

2. Zusaz.

Hieraus folgt, daß man eine jede ganze Zahl in einen unächten Bruch von einem vorgeschriebenen Nenner verwandelt, wenn man nehmlich die ganze Zahl mit dem vorgeschriebenen Nenner des Bruches multiplicirt, und das Produkt zum Zähler, den Multiplikator aber zum Nenner macht. So kann z. B. 8 in einen Bruch, dessen Nenner 5 sein soll, verwandelt werden, denn $\frac{8 \cdot 5}{5} = 40$, aber nicht 40 Ganze, sondern $\frac{40}{5}$, weil $\frac{8 \cdot 5}{5} = 8 \cdot 5 : 5$ (§. 37.) und $8 \cdot 5 : 5 = 8$ ist.

Lehrsaz.

§. 46. Wenn man blos den Zähler eines Bruches (d. i. ohne seinen Nenner zu ändern) mit einer vorgeschriebenen oder nach Willkühr gewählten ganzen Zahl multiplicirt, oder blos den Nenner mit eben derselben Zahl dividirt, so wird der Bruch so vielmal grösser, als die ganze Zahl Einheiten enthält; dividirt man hingegen blos den Zähler eines Bruchs, oder multiplicirt man blos den Nenner desselben, so wird der Bruch so vielmal kleiner, als die ganze Zahl Einheiten enthält *).

Beweis.

1. Es sei $\frac{6}{8}$ gegeben und die vorgeschriebene ganze Zahl sei 2; so ist $\frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{12}{8} = 2 \cdot \frac{6}{8}$, und $\frac{6}{8 : 2} = \frac{6}{4} = 2 \cdot \frac{6}{8}$, da nun $\frac{1}{8}$ die Hälfte von $\frac{1}{4}$ (§. 44. 1. Zus.), so ist auch $\frac{6}{8}$ die Hälfte von $\frac{6}{4}$.

2. Es

*) Dieser Saz läßt sich am schiklichsten durch Linien erläutern. Auch kann man sich merken, daß die Multiplikation und Division der Zähler eben die Wirkung hat, wie bei ganzen Zahlen (d. i. die Multiplikation der Zähler vermehrt und die Division der Zäh-

2. Es sei wie im vorigen $\frac{6}{8}$ und die ganze Zahl 2 gegeben; so ist $\frac{6:2}{8} = \frac{3}{8} = \frac{6}{8}:2$, und $\frac{6}{8.2} = \frac{6}{16} = \frac{6}{8}:2$. Da nun $\frac{1}{16}$ die Hälfte von $\frac{1}{8}$ (§. 44. 1. Zus.), so ist auch $\frac{6}{16}$ die Hälfte von $\frac{6}{8}$.

Zusatz.

Daraus folgt: ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder seinen Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, oder seinen Nenner damit dividirt; umgekehrt: ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man entweder seinen Zähler mit der ganzen Zahl dividirt, oder seinen Nenner damit multiplicirt.

Lehrsatz.

§. 47. Den Werth eines Bruches ändert man nicht, wenn man seinen Zähler und Nenner, mit einer und eben derselben ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt.

Beweis.

Multiplicirt man z. B. den Zähler eines Bruches mit 2, 3, 4 rc. so wird der Bruch um so vielmal grösser; multiplicirt man aber auch seinen Nenner mit 2, 3, 4 rc. (nehmlich mit eben derselben Zahl,) so wird er um eben so vielmal kleiner (§. 46). Eben so auch: dividirt man den Zähler eines Bruchs mit 2, 3, 4 rc. so wird der Bruch um eben so vielmal kleiner, dividirt man aber auch seinen Nenner mit 2, 3, rc. so wird er um eben

Zähler vermindert den Werth der Brüche). Die Multiplikation und Division der Nenner hingegen hat eine der vorigen entgegengesezte Wirkung, (d. i. die Multiplikation der Nenner vermindert und die Division der Nenner vermehrt den Werth der Brüche).

eben so vielmal grösser (§. 46.), folglich bleibt er in beiden Fällen wie er vor der Multiplikation und Division war, und der Werth wird nicht geändert.

Zusaz.

Daher kann man einen Bruch unter vielen Formen ausdrüken, ohne daß sein Werth geändert wird. Z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ ꝛc. oder $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$. Eben so verhält es sich mit den ganzen Zahlen, die in der Form eines unächten Bruches ausgedrükt werden. Z. B. $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$ ꝛc. oder $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4}$ ꝛc. (§. 45. 2 Zusaz).

Erklärung.

§. 48. Einen Bruch aufheben heißt ihn in seiner kleinsten Form, oder durch seine kleinsten Zahlen ausdrüken. Dies ist möglich, so lange man eine ganze Zahl findet, die im Zähler und Nenner des Bruchs zugleich aufgeht, wie z. B. $\frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Die Brüche durch ihre kleinsten Zahlen ausgedrükt schaffen den Vortheil, daß man die Grösse derselben oder ihren Werth leicht beurtheilen kann, da es im Gegentheil bey grössern Zahlen schwerer wird (§. 44. Zusaz 1.). So ist der Bruch $\frac{1}{2}$ leichter der Grösse nach zu beurtheilen als $\frac{8}{16}$ ꝛc.

Anmerkung.

Folgende Regeln sind zu vortheilhaften Abkürzungen beym Aufheben der Brüche zu empfehlen.

1. Wenn eine Zahl, welche es auch sei, mit 2 multiplicirt wird, so ist das niedrigste Zahlzeichen im Produkte eins von diesen 2, 4, 6, 8, 0.

Der

Der Beweis liegt im Einmaleins.

Denn $1.2 = 2$, $2.2 = 4$, $3.2 = 6$, $4.2 = 8$, $5.2 = 10$, $6.2 = 12$, $7.2 = 14$, $8.2 = 16$, $9.2 = 18$ ꝛc.

Zusaz.

Daraus folgt, wenn sich eine Zahl mit 2, 4, 6, 8, 0 endigt, so kann man sich vorstellen, als sei die Zahl aus einer andern entstanden, die mit 2 multiplicirt worden, und also läßt sie sich auch mit 2 dividiren.

2. Wenn die Zahlzeichen einer Zahl einzeln addirt werden, und drei, oder ein Vielfaches von 3 ausmachen, so läßt sich die Zahl selbst mit 3 dividiren.

Beweis.

Es ist $1.3 = 3$				
$2.3 = 6$				
$3.3 = 9$				
$4.3 = 12$	die Zahlzeichen	einzeln	addirt	$1 + 2 = 3$
$5.3 = 15$	—	—	—	$1 + 5 = 6$
$6.3 = 18$	—	—	—	$1 + 8 = 9$
$7.3 = 21$	—	—	—	$2 + 1 = 3$
$8.3 = 24$	—	—	—	$2 + 4 = 6$
$9.3 = 27$	—	—	—	$2 + 7 = 9$
$10.3 = 30$	—	—	—	$3 + 0 = 3$
$11.3 = 33$	—	—	—	$3 + 3 = 6$
$12.3 = 36$	—	—	—	$3 + 6 = 9$;

da nun die Summen dieser Zahlzeichen entweder 3 selbst oder ein Vielfaches von 3 ausmachen, so folgt, daß die Zahlen selbst, weil sie Produkte von 3 sind, mit 3 ohne Rest dividirt werden können.

Zusaz.

Ist überdies das lezte Zahlzeichen eins von diesen 2, 4, 6, 8, 0, so läßt sich die Zahl mit 6 dividiren.

Denn

Denn im Einmaleins sind die Produkte mit 3 eins ums andere zugleich Vielfache von 6. Nehmlich: 6, 12, 18, 24, 30 ꝛc.

3. Endigt sich eine Zahl mit 5 oder 0, so kann sie mit 5 dividirt werden, denn alle Produkte mit 5 geben zu der kleinsten Zahl 5 oder 0.

Beweis.

Denn	5	=	1 . 5	=	1		
	10	=	2 . 5	=	2		
	15	=	3 . 5	=	3		
	20	=	4 . 5	=	4		
	25	=	5 . 5	=	5	}	mal 5.
	30	=	6 . 5	=	6		
	35	=	7 . 5	=	7		
	40	=	8 . 5	=	8		
	45	=	9 . 5	=	9		

Zusaz.

Nach §. 43. Zus. 1. wird eine Zahl, die am Ende Nullen hat, mit 10 dividirt, wenn man eine Null wegstreicht, und übrigens die Zahl unverändert läßt, folglich lassen sich alle Zahlen mit 10 dividiren, die am Ende eine oder mehrere Nullen haben.

4. Wenn man die Einer einer Zahl mit 2 multiplicirt und das Produkt ist den übrigen Zahlzeichen der Zahl entweder gleich, oder um 7 oder ein Vielfaches von 7 verschieden, so läßt sich die Zahl mit 7 dividiren.

Beweis.

Die Einer mit 2 multipliciren und um eine Stelle weiter zur Rechten sezen, ist soviel als sie mit 20 multipliciren. Nun stehen aber auch die Einer an ihrer Stelle, nehmlich in der ersten zur Linken, folglich sind sie 20mal und einmal, d. i. 21mal da; und die Zahl 21 ist durch

durch 7 theilbar. So ist z. B. bei 63 der erste Fall, nehmlich 2 . 3 = 6; so auch bei 126 ist 2 . 6 = 12. Der andere Fall aber bey 259 ist 25 — 2 . 9 = 7; Ferner bei 889 ist 88 — 2 . 9 = 70, und 70 ist ein Vielfaches von 7 oder 7 . 10 = 70.

5. Jede Zahl, deren Zahlzeichen zusammen addirt eine, oder mehrere 9 geben, läßt sich durch 9 dividiren.

B e w e i s.

Die einzelnen Zahlzeichen eines Produkts aus 9 addirt, geben allemal 9 oder ein Vielfaches von 9, wie man aus folgender Tabelle sehen kann.

9	=	9										
18	=	1	+	8	=							9
27	=	2	+	7	=							9
36	=	3	+	6	=							9
45	=	4	+	5	=							9
54	=	5	+	4	=							9
63	=	6	+	3	=							9
72	=	7	+	2	=							9
81	=	8	+	1	=							9
90	=	9	+	0	=							9
99	=	9	+	9	=	18	=	1	+	8		9
108	=	1	+	0	+	8	=					9
117	=	1	+	1	+	7	=					9
126	=	1	+	2	+	6	=					9
135	=	1	+	3	+	5	=					9
												ꝛc.

folglich läßt sich die ganze Zahl mit 9 dividiren.

6. Alle Zahlen, welche aus zwei gleichen Zahlzeichen bestehen, lassen sich ohne Rest mit 11 dividiren. So ist $\frac{44}{11} = 4$, $\frac{55}{11} = 5$, $\frac{66}{11} = 6$, $\frac{77}{11} = 7$ ꝛc.

Der Beweis ergiebt sich von selbst.

7. Wenn die Summe der Zahlzeichen einer Zahl aus der ersten, dritten, fünften, siebenten ꝛc. Stelle, von der Rechten zur Linken, entweder so groß ist als die Summe der Zahlzeichen aus der zweiten, vierten, sechsten ꝛc. Stelle, oder beide Summen um 11, oder ein Vielfaches von 11 verschieden sind; so läßt sich die Zahl mit 11 dividiren.

Beweis.

Multiplicirt man eine Zahl mit 11 z. B. 2465;

$$\begin{array}{r} 2465 \\ 11 \\ \hline 2465 \\ 2465 \\ \hline 27115 \end{array}$$

So ist $2 + 1 + 5 = 7 + 1$. Weil nun das Multiplikandum mit 1 multiplicirt, nicht vermehrt wird, ausser daß mit 1, welche in der Stelle der Zehner steht, auch das Produkt eine Stelle weiter zur Linken gesezt wird; so müssen durch die Addition der geraden und ungeraden Glieder die Summen gleich sein. Da man aber in der Summe statt 10 Einheiten, einen Zehner zu der folgenden Reihe nimmt, so tritt der Fall bisweilen ein, daß die Summe der geraden und ungeraden Glieder um eine, oder mehrere Eilfen unterschieden sind. Z. B. $11 . 6721 = 73931$. Alsdann ist $7 + 9 + 1 = 3 + 3 + 11$.

Zusaz.

Endiget sich überdies eine Zahl, die mit 11 dividirt werden kann, mit einem von den Zahlzeichen 2, 4, 6, 8, 0 so kann sie mit $22 = 2 . 11$ dividirt werden. Z. B. bei 7524 ist $7 + 2 = 5 + 4$ also läßt sich die Zahl durch 11 dividiren. Nun ist das lezte Zahlzeichen 4, folglich kann

kann man auch die Zahl mit 22 dividiren, denn $\frac{7524}{22}$ giebt eine ganze Zahl.

8. Alle Zahlen, welche aus 3 gleichen Zahlzeichen bestehen, kann man mit 37 dividiren, oder mit einem Produkte aus 37, in eins dieser 3 gleichen Zahlzeichen. Z. B. $\frac{666}{37}$ giebt eine ganze Zahl, also auch $\frac{666}{6.37}$.

Beweis.

$37.3 = 111$, und $37.3.2 = 111.2 = 222$, eben so $37.3.3 = 111.3 = 333$ rc., also entstehen die Zahlen, welche aus 3 gleichen Zahlzeichen bestehen, aus den Produkten 37.3; 37.6; 37.9; 37.12 rc.

Ist also ein Bruch gegeben, und man soll ihn durch kleinere Zahlen ausdrüken, so kann man sich, wenn es angeht, der vorhin beschriebenen Regeln bedienen *). Es sei z. B. der Bruch $\frac{465}{930}$. Zähler und Nenner haben die in §. N. 3. beschriebenen Kennzeichen, folglich kann man sie mit 5 dividiren; $\frac{465:5}{930:5}$, oder

$$\overset{5}{\frac{465}{930} \Big| \frac{93}{186}}$$

Der Gebrauch dieser Regeln dient allerdings dazu, eine Zahl auf eine leichte Art zu finden, mit welcher Zähler und Nenner eines Bruchs dividirt werden kann, um denselben durch kleinere Zahlen auszudrüken: aber durch dieses Verfahren wird man nicht überzeugt, ob die gefundenen Zahlen, mit welchen der Bruch ausgedrükt wird, die kleinsten sind; daher muß man sich noch mit einigen, bisher unberührten Eigenschaften der Zahlen bekannt machen, durch deren Hülfe ein Bruch durch seine kleinsten Zahlen ausgedrükt werden kann.

*) Vollständiger findet man diese auseinander gesezt in Funks Anfangsgründen der Mathematik.

Erklärungen.

§. 49. Zu den besondern Eigenschaften der Zahlen führt die Lehre von dem Maasse derselben. Man sagt eine Zahl geht auf in einer andern, wenn sie die andere ohne Rest dividirt, wie z. B. 4 : 2, 8 : 4 ꝛc. (§. 42. Erster Fall.) Die Zahl, welche in einer andern aufgeht, also der Divisor ist, heißt ein Maaß der andern. So ist 2 das Maaß von 4, und 4 das Maaß von 8 ꝛc.

Zusaz.

Daraus folgt, die Einhoit ist das Maaß einer ieden Zahl, und iede Zahl ihr eigen Maaß (§. 11.).

§. 50. Geht eine Zahl in mehrern verschiedenen ganzen Zahlen auf, so heißt sie ein gemeinschaftliches oder das gemeine Maaß aller dieser Zahlen. So ist z. B. die Zahl 4 für die Zahlen 8, 16, 20, 24 ꝛc. das gemeine Maaß. Das größte gemeine Maaß mehrerer Zahlen ist, wenn sich kein größeres angeben läßt, welches in jeder dieser Zahlen aufgeht. Also ist 12 das größte gemeine Maaß für die Zahlen 12 und 36, so auch 2 für die Zahlen 8 und 66.

§. 51. Eine Zahl, welche nur sich selbst oder die Einheit zum Maasse hat, heißt eine einfache Zahl oder Primzahl. Ist eine Zahl aber durch die Multiplikation zweier oder mehrer Primzahlen in einander entstanden, so betrachtet man diese Zahlen als einfache Faktoren, das Produkt aber als

wäre

wäre es aus diesen einfachen Faktoren zusammengesezt. So sind 2, 3, 5, 7, 11, 13 ꝛc. Primzahlen; 4, 6, 8, ꝛc. aber zusammengesezte Zahlen. Die Zahlen von der ersten Art werden auch **absolute Primzahlen** zum Unterschiede derjenigen genannt, welche wenn man mehrere zusammennimmt, kein gemeines Maaß haben, aber dennoch einzeln mit kleinern Zahlen aufgehen können. Dergleichen Zahlen sind z. B. 9 und 16. In 9 geht 3 und in 16 geht 2, 4, und 8 auf, aber für beide giebt es kein **gemeines Maaß**. Diese Zahlen, die kein gemeines Maaß haben, nennt man daher **Primzahlen unter sich.**

Zusaz.

Zwei oder mehrere absolute Primzahlen sind allemal Primzahlen unter sich; aber nicht umgekehrt, weil unter Primzahlen unter sich iede ein oder mehrere Maasse haben kann. Befindet sich untet mehrern Zahlen nur eine absolute Primzahl, so sind sie alle Primzahlen unter sich.

Lehrsäze.

§. 52. Jede Zahl ist entweder selbst eine Primzahl, oder eine aus Primzahlen zusammengesezte Zahl.

Beweis.

Ist eine Zahl keine Primzahl, so ist sie aus Faktoren zusammengesezt. Sind die Faktoren selbst zusammengesezt, so kann man diese Faktoren aufs neue so lange zerlegen, bis man auf Primzahlen kommt. So ist 30 = 2 . 3 . 5.

Zusaz.

Vermittelst der Primzahlen kann man ebenfalls einen Bruch **aufheben**, wenn man nämlich Zähler und Nenner in ihre einfachen Faktoren zerfällt und die gemeinschaftlichen im Zähler und Nenner gegen einander wegstreicht. So ist z. B. $\frac{2310}{9350} = \frac{2.7.\ 11.5.3}{5.11.17.2.5} = \frac{7.3}{17.5} = \frac{21}{85}$. Nun sind 21 und 85 Primzahlen unter sich, also läßt sich die Form des Bruchs nicht noch mehr abkürzen, folglich ist der Bruch mit seinen kleinsten Zahlen ausgedrükt. Da dies Auffinden der einfachen Faktoren aber besondere Kennzeichen erfordert, die hier anzugeben zu weitläuftig ist, so kann man die schon dazu eingerichteten **Tabellen** benuzen. Unter mehrern sind zu empfehlen:

Tabellen der Primzahlen und der Faktoren der Zahlen, welche unter 100100, und durch 2, 3 oder 5 nicht theilbar sind. Herausgegeben durch Johann Neumann. Dessau 1785. Ferner

Tafel aller einfachen Faktoren, der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10500. In den logarithmischen, trigonometrischen, und andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. Von Georg Vega. Wien 1783.

§. 53. Eine Zahl, die in einem von den Faktoren eines Produkts aufgeht, geht im Produkte selbst auf.

Beweis.

Sie ist alsdenn ebenfalls ein Faktor des Produkts. Es sei 6 die Zahl, 42 und 4 die Faktoren eines Produkts, und es ist $42:6 = 7$, also $4.6.7 = 42.4$.

§. 54. Eine Zahl, die in zwei andern aufgeht, muß auch in der Summe dieser beiden Zahlen aufgehen.

Be-

Beweis.

Es sei 6 diese Zahl, 18 und 6 die beiden andern. Nun ist 6 in 6 und 18, nämlich in ieder für sich, ein oder mehrere male ohne Rest enthalten, folglich muß 6 auch in $6 + 18 = 24$ mehrere male ohne Rest enthalten sein, denn 6 ist selbst ein Faktor von 24 (§. 53.).

§. 55. Eine Zahl, die in der Summe zweier Zahlen, und in einer von beiden allein aufgeht, muß auch in der andern aufgehen.

Beweis.

Es sei 8 die eine Zahl, 48 die Summe zweier Zahlen, und eine von beiden sei 16, in welcher 8 aufgeht. Nun ist $48 - 16 = 32$. Da nun $32 = 8 . 4$ ist; so muß auch 8 als Faktor in 32 aufgehen.

§. 56. Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der grössern aufgeht; so ist sie das größte gemeine Maaß der beiden Zahlen.

Beweis.

Da die kleinere in ihr selbst und auch in der grössern aufgeht; so giebt es keine grössere Zahl, die in beiden zugleich aufgienge, folglich ist die kleinere selbst das größte gemeine Maaß (§. 50.). So ist 12 das größte gemeine Maaß von 12 und 48.

§. 57. Wenn von zwei Zahlen, die kleinere in der grössern nicht aufgeht; so kann das gemeine Maaß beider Zahlen nicht grösser als der Rest sein.

Beweis.

Die grössere Zahl besteht aus dem Produkte der kleinern und aus dem Reste, oder die grössere Zahl ist die

Summe dieses Produkts und des Restes. Da nun ein gemeines Maaß beider Zahlen in der Summe und dem Produkte beider Zahlen aufgeht, also muß es auch im Reste aufgehen (§. 54.), folglich kann es nicht grösser als der Rest sein. Es sei z. B. 52 und 12. So ist 52 = 12 . 4 + 4 (§. 30.), und 4 ist das gemeine Maaß, weil 52 : 4 und 12 : 4 ganze Zahlen im Quotienten geben (§. 42.).

§. 58. Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der grössern nicht aufgeht, aber wohl der Rest in der kleinern; so ist der Rest selbst das **größte gemeine Maaß.**

Beweis.

Denn gesezt der Rest geht in der kleinern Zahl auf, so geht er auch im Produkte der kleinern in den Quotienten auf (§. 53.), aber auch in sich selbst, folglich auch in der Summe des Produkts und des Restes (§. 54.), oder welches einerlei ist, in der grössern Zahl (§. 57.); also ist er ein gemeines Maaß beider Zahlen und nach (§. 57.) das größte.

Es sei z. B. 52 und 12. So ist 52 : 12 = 4 + 4, wo alsdenn 4 der Rest ist, und 12 : 4 giebt einen Quotienten ohne Rest, folglich 4 das größte gemeine Maaß von 52 und 12.

§. 59. Wenn von zwei Zahlen die kleinere in der grössern nicht aufgeht, auch nicht der Rest in der kleinern: so ist das größte gemeine Maaß der kleinern Zahl und des Restes, auch zugleich das größte gemeine Maaß der grössern Zahl.

Beweis.

Wäre dies nicht, so müßte es ein noch grösseres geben, welches aber auch zugleich im Reste aufgehen müßte (§. 58.), welches unmöglich ist.

Es

Es sei z. B. 78 und 8. So ist 78:8 ohne auf den Quotienten Rüksicht zu nehmen, der Rest 6; also 8:6 der Rest 2, folglich 6:2 giebt eine ganze Zahl im Quotienten, also ist 2 das größte gemeine Maaß für 78 und 8;

denn 8) 78 | 9
72
6

6) 8 | 1
6
2

2) 6 | 3
6
0

§. 60. Wenn man von zwei gegebenen Zahlen, die grössere mit der kleinern dividirt und einen Rest erhält, den vorhergehenden Divisor mit diesem Reste von neuem dividirt u. s. f. bis man einen Rest erhält, der in dem nächstvorhergehenden Divisor aufgeht: so ist dieser Rest das größte gemeine Maaß, der beiden Zahlen.

B e w e i s.

Da dieser Rest das größte gemeine Maaß für die lezten 2 Zahlen ist, so ist er es auch nach §. 59. für die vorhergehenden zwei und so fort für alle, bis auf die ersten beiden gegebenen Zahlen.

Es sei z. B. 323 und 228 gegeben.

So ist 228) 323 | 1
228
95

```
95) 228 | 2
    190
    ---
     38

38)  95 | 2
     76
     --
     19

19)  38 | 2
     38
     --
      0
```

folglich ist 19 das größte gemeine Maaß für die Zahlen 19 und 38; also auch für 38 und 95; ferner für 95 und 228, und folglich auch für 228 und 323.

Aufgabe.

§. 61. Das größte gemeine Maaß zweier Zahlen zu finden.

Auflösung.

1. Man dividire die größere mit der kleinern Zahl, so wird man finden, ob die kleinere selbst das größte gemeine Maaß sei (§. 56.).
2. Bleibt ein Rest, so dividire man mit demselben die kleinere Zahl. Geht die Division auf, so ist der vorhingebliebene Rest das größte gemeine Maaß (§. 58.).
3. Geht die Division noch nicht auf, so dividire man den vorhergehenden Divisor mit dem zulezt gebliebenen Reste. Geht nun die Division auf, so ist der zulezt gebliebene Rest das größte gemeine Maaß (§. 59.).
4. Wäre noch ein Rest geblieben, so müßte man die vorhin beschriebene Division so lange wiederholen, bis alles aufgeht, und dann ist der Rest, der in den nächstvorhergehenden Divisor aufgeht, oder kürzer der lezte Divi-

Divisor, durch welchen die Division aufgeht, das größte gemeine Maaß (§. 60.).

5. Bliebe 1 zum Reste, so sind die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich (§. 51.).
Von den Gründen dieses Verfahrens kann man sich ohne Schwierigkeit aus den vorhergehenden Lehrsätzen überzeugen.

1. Zusatz.

Sind 3, 4 und mehrere Zahlen gegeben und man soll ihr gemeinschaftliches größtes Maaß finden, so ordne man sie nach ihrer Grösse, dividire die kleinste in die nächst grössere und suche nach den im §. in N. 1. 2. 3. 4. gegebenen Regeln ihr größtes gemeines Maaß. Ist dieses gefunden, so nehme man das schon gefundene größte gemeine Maaß der beiden ersten Zahlen und die folgende von den gegebenen Zahlen zusammen, und sehe ob dieses auch für die dritte Zahl das größte gemeine Maaß sey; wo nicht, so verfahre man wie vorhin und suche ein neues, welches zugleich das größte gemeine Maaß der ersten beiden Zahlen sein wird. Eben so verfahre man mit den folgenden. Bleibt hier auch nur bey einer 1 zum Reste, so sind alle die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich.

Beispiel.

Die gegebenen Zahlen sind 140. 182. 273.

```
140)  182 | 1
      140
      ---
       42

 42)  140 | 3
      126
      ---
       14
```

40)

```
14)  42 | 3
     42
     --
      0
```

also ist 14 das größte gemeine Maaß für 140 und 182

```
14)  273 | 19
     14
     ---
     133
     126
     ---
       7

7)  14 | 2
    14
    --
     0
```

also ist 7 das größte gemeine Maaß für 14 und 273, folglich auch für 140 und 182, daher für alle gegebenen Zahlen 140. 182 und 273.

2. Zusaz.

Wenn man daher den Zähler und Nenner eines Bruches mit ihrem größten gemeinen Maaße dividirt: so erhält man den Bruch mit seinen kleinsten Zahlen ausgedrükt, d. i. man hebt einen Bruch auf (§. 48).

Z. B. es sei $\frac{228}{323}$. Das größte gemeine Maaß nach §. 60. ist 19

$$\frac{228}{323} \overset{19}{\Big|} \frac{12}{17}$$

Erklärung.

§. 62. Gleichnamige Brüche sind solche, die einerlei Nenner haben, ungleichnamige hingegen, die verschiedene Nenner haben. Brüche gleichnamig machen, oder unter einerlei

Benen=

Benennung bringen, heißt andere Brüche finden, die einerlei Nenner, oder einen General= oder Hauptnenner haben. Ist der gefundene Hauptnenner unter allen möglichen der kleinste, so werden die gleichnamigen Brüche mit ihren kleinsten Zahlen ausgedrükt.

Zusaz.

Man bringt daher Brüche unter einerlei Benennung, wenn man Zähler und Nenner eines ieden Bruchs, mit den Nenner des andern oder wenn es mehrere sind, mit dem Produkte aus den Nennern der übrigen Brüche multiplicirt (§. 47.). Sind z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ gegeben, ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$ und $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$, oder sind $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ gegeben, so ist $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{112}{280}$; $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8}{7 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{160}{280}$; $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{175}{280}$.

Durch dieses Verfahren bringt man zwar iedesmal die Brüche unter einerlei Benennung; aber die Brüche werden nicht immer durch die kleinsten Zahlen ausgedrükt, weil das Produkt aller Nenner nur in den wenigsten Fällen der kleinste Hauptnenner ist.

Aufgaben.

§. 63. Den kleinsten Hauptnenner mehrerer Brüche zu finden.

Auflösung.

1. Man suche das größte gemeine Maaß aller, oder doch der mehrsten Specialnenner nach §. 61.
2. Mit demselben dividire man in die Specialnenner und seze die Quotienten wie im folgenden Beispiel unter.
3. Haben alle, oder einige von diesen Quotienten noch für sich ein gemeines Maaß, so dividire man sie abermals und zwar mit dem größten gemeinen Maaße. Auf diese Art fahre man fort, bis kein gemeinschaftliches Maaß mehr statt findet.

4. Nun

4. Nun mache man das Produkt aller zulezt gebliebenen Zahlen und der gebrauchten Divisoren; so ist dies Produkt der gesuchte kleinste Hauptnenner.

Beispiele.

Gegebene Nenner		140	182	273
Größtes gemeines Maaß	7)	20	26	39
— — —	2)	10	13	39
— — —	13)	10	1	3

folglich ist der kleinste Hauptnenner = 10. 1. 3. 7. 2. 13 = 5460

oder

Gegebene Nenner		14	28	70
Größtes gemeines Maaß	14)	1	2	5

also der kleinste Hauptnenner = 1. 2. 5. 14 = 140.

Beweis.

Da die bey dem ersten Beispiele gebrauchten Divisoren 7. und 2, und die übrig gebliebenen Zahlen 10, 13 und 39 Faktoren der gegebenen Nenner 140, 182 und 273, vermöge der gegebenen Auflösung sind; so müssen die Nenner 140, 182 und 273 in dem daraus gemachten Produkte 5460 aufgehen (§. 53.), also läßt sich hierzu keine kleinere Zahl finden, folglich ist dieses Produkt der kleinste Hauptnenner. Eben dieses kann aber auch für alle ähnliche Fälle bewiesen werden, folglich ist der Saz allgemein bewiesen.

§. 64. Zwei oder mehr ungleichnamige Brüche unter einerlei Benennung zu bringen.

Auf=

Auflösung.

1. Man suche nach §. 63. den kleinsten Hauptnenner.
2. Dividire solchen mit ieden Nenner der gegebenen Brüche, und seze den Quotienten in eine Reihe besonders.
3. Multiplicire den dazu gehörigen Zähler mit dem iedesmaligen Quotienten. Das Produkt des Zählers mit dem Quotienten giebt den neuen Zähler eines ieden Bruchs, wozu der Hauptnenner als Nenner gehört.

Folgende Beispiele können zum Muster dieses Verfahrens dienen.

Gegebene Brüche		Quotienten	Neue Zähler
Haupt-	$\frac{2}{5}$	56	112
nenner	$\frac{4}{7}$	40	160
280	$\frac{5}{8}$	35	175

Gegebene Brüche			
Haupt-	$\frac{3}{14}$	10	30
nenner	$\frac{9}{28}$	5	45
140	$\frac{47}{70}$	2	94

Also im ersten Beispiele $\frac{2}{5} = \frac{112}{280}$; $\frac{4}{7} = \frac{160}{280}$; $\frac{5}{8} = \frac{175}{280}$,
im zweiten Beispiele $\frac{3}{14} = \frac{30}{140}$; $\frac{9}{28} = \frac{45}{140}$; $\frac{47}{70} = \frac{94}{140}$.

Beweis.

Der durch die Division eines jeden Nenners in den Hauptnenner erhaltene Quotient zeigt an, wie vielmal der Bruch kleiner geworden ist, denn das Produkt des Nenners in dem Quotienten ist gleich den Hauptnenner (§. 46.). Da aber auch der Zähler eines ieden Bruchs mit diesem Quotienten multiplicirt worden, so ist der Bruch um eben so vielmal grösser geworden (§. 46.), folglich ist sein Werth ungeändert geblieben. Nun haben die Brüche alle einen gemeinschaftlichen Nenner bekommen,

men, folglich sind sie unter einerlei Benennung gebracht (§. 62.).

2. Von den vier Rechnungsarten der Brüche.

A. Addition.

Lehrsaz.

§. 65. Die Summe zweier oder mehrerer Brüche, die gleiche Nenner haben, oder auf einerlei Benennung gebracht sind, ist ein Bruch, dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner der gegebenen Brüche, der Zähler aber der Summe der gegebenen Zähler gleich ist.

Der Beweis ergiebt sich aus den im §. 44. und aus den in den Zusäzen gegebenen Begriffen, und aus der Lehre von den ganzen Zahlen.

Aufgabe.

§. 66. Zwei oder mehr Brüche zu addiren.

Auflösung.

1. Man bringe die gegebenen Brüche nach §. 64. unter einerlei Benennung, wofern sie nicht gleiche Nenner haben.
2. Addire die Zähler, und seze unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner.
3. Ist die Summe ein unächter Bruch, so verwandle man ihn durch die Division des Nenners in den Zähler in eine gemischte Zahl nach §. 44. 2. Zusaz.

Beispiel.

Es sind wie im §. 64. die Brüche $\frac{3}{14}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{47}{70}$ gegeben.

$\frac{3}{14}$

	140	
$\frac{3}{14}$	10	30
$\frac{9}{28}$	5	45
$\frac{47}{70}$	2	94
		$\frac{169}{140} = 1\frac{29}{140}$

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{30}{140} = \frac{3}{14} \\ \frac{45}{140} = \frac{9}{28} \\ \frac{94}{140} = \frac{47}{70} \end{array}\right\} \quad (\S.\ 64.)$$

$$\frac{30}{140} + \frac{45}{140} + \frac{94}{140} = \frac{3}{14} + \frac{9}{28} + \frac{47}{70} \quad (\S.\ 61.)$$

$$\frac{30}{140} + \frac{45}{140} + \frac{94}{140} = \frac{169}{140} = 1\frac{29}{140} \quad (\S.\ 64.)$$

$$\frac{3}{14} + \frac{9}{28} + \frac{47}{70} = \frac{169}{140} = 1\frac{29}{140} \quad (\S.\ 14.)$$

1. Zusaz.

Befinden sich Ganze bei den Brüchen, so addire man, wenn die Brüche addirt sind, die Ganzen für sich, und seze die Summe vor die Summe der Brüche.

Soll z. B. $4\frac{8}{9}$ und $6\frac{2}{5}$ addirt werden, so verfahre man auf folgende Art.

	45	
$4\frac{8}{9}$	5	40
$6\frac{2}{5}$	9	18
1		
$11\frac{13}{45}$		$\frac{58}{45} = 1\frac{13}{45}$

also ist die Summe $= 11\frac{13}{45}$.

2. Zusaz.

Eine gemischte Zahl wird addirt, wenn sie in einen unächten Bruch verwandelt wird, und dies geschieht, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des daranhängenden Bruchs multiplicirt und den Zähler dazu addirt, den Nenner aber unter die erhaltene Summe sezt.

z. B. $9\frac{3}{5} = \frac{45}{5} + \frac{3}{5} = \frac{48}{5}$, oder

	5	
$\frac{9}{1}$	5	45
$\frac{3}{5}$	1	3
		$\frac{48}{5}$ (§. 45. Zus. 2.)

Von diesem Verfahren sagt man gewöhnlich: man richte einen Bruch ein.

B. Subtraktion.

Lehrsaz.

§. 67. Die Differenz zweier Brüche, die gleiche Nenner haben, oder unter einerlei Benennung gebracht sind, ist ein Bruch, dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner der gegebenen Brüche, der Zähler aber die Differenz jener Zähler ist.

Beweis. (§. 65.)

Aufgabe.

§. 68. Einen kleinern von einem grössern Bruche zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Man bringe die beiden gegebenen Brüche, wenn sie verschiedene Nenner haben, unter einerlei Benennung (§. 64.).

2. Subtrahire den kleinern Zähler von dem grössern, und seze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner.

Beispiel.

24		
$\frac{7}{8}$	3	21
$\frac{5}{12}$	2	10
		$\frac{11}{24}$ die gesuchte Differenz.

Beweis.

$\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$
$\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ (§. 64.)

$\frac{21}{24} - \frac{10}{24} = \frac{7}{8} - \frac{5}{12}$ (§. 61.)
$\frac{21}{24} - \frac{10}{24} = \frac{11}{24}$ (§. 67.)

$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{11}{24}$ (§. 14.)

Zusaz.

1. Soll man von einer ganzen Zahl einen Bruch subtrahiren, so borgt man bei der ganzen Zahl 1, und verwandelt dieselbe 1 nach §. 45. Zusaz 2. in einen Bruch, der mit dem gegebenen einerlei Nenner hat und subtrahirt.

Z. B. $4 - \frac{3}{4} = 3\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$.

2. Sind gemischte Zahlen gegeben, und man soll sie subtrahiren, so richte man sie ein nach §. 66. Zusaz 2. und bringe sie unter einerlei Benennung, wenn sie verschiedene Nenner haben nach §. 64, und subtrahire wie vorhin z. B. $3\frac{5}{8} - 2\frac{4}{5}$, so ist $3\frac{5}{8} = \frac{29}{8}$, $2\frac{4}{5} = \frac{14}{5}$ (§. 68. Zusaz 2.)

40		
$\frac{29}{8}$	5	145
$\frac{14}{5}$	8	112
		$\frac{33}{40}$

also $3\frac{5}{8} - 2\frac{4}{5} = \frac{33}{40}$.

Anmerkung.

Die Addition und Subtraktion dienen auch bei den Brüchen einander zur Probe.

C. Multiplikation.

Aufgabe.

§. 69. Einen Bruch mit einem andern zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Das Produkt der gegebenen Zähler giebt den Zähler, und das Produkt der gegebenen Nenner den Nenner des gesuchten Produkts.

Z. B. $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{6}{28}$.

Beweis.

Einen Bruch $\frac{1}{4}$mal, heißt den 4ten Theil davon nehmen, also denselben 4mal kleiner machen. Dies geschieht nach §. 46., wenn man den Nenner mit 4 multiplicirt; so ist $\frac{2}{7 \cdot 4} = \frac{2}{28}$, also der vierte Theil von $\frac{2}{7}$; hingegen einen Bruch $\frac{3}{4}$, heißt den vierten Theil 3mal nehmen. So muß also $\frac{2}{28}$ um dreimal grösser werden, und dies geschieht, wenn man den Zähler mit 3 multiplicirt (§. 46.), und man erhält also $\frac{6}{28} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$.

1. Zusatz.

Folglich entsteht das Produkt, wenn man das Multiplikandum so vielmal vermindert, als die Zahl des Nenners vom Multiplikator angiebt; aber auch wieder so vielmal vermehrt, als es der Zähler des Multiplikators verlangt. Hieraus ergeben sich einige vortheilhaftere Methoden für die Multiplikation der Brüche, die ihren Grund

Grund insgesammt in §. 46. haben. Sind die Fälle den Methoden angemessen, so erhält man durch ihren Gebrauch die Produkte der Brüche in kleinern Zahlen ausgedrükt, als nach der angezeigten allgemeinen Methode.

Erster Fall. Man kann, wenn die Divisionen aufgehen, des Multiplikandi Zähler mit des Multiplikators Nenner, und des ersten Nenner mit des leztern Zähler dividiren,

z. B. $\frac{27}{28} \cdot \frac{2}{3} = \frac{27 : 3}{28 : 2} = \frac{9}{14}$.

Zweiter Fall. Wenn eine von beiden Divisionen allein, die andere aber nicht aufgeht; so lasse man die Zahl, welche mit dem Divisor nicht aufgehen würde, unverändert, und multiplicire, was der Divisor der andern Zahl giebt, mit derjenigen, womit man sonst die erste hätte dividiren müssen.

z. B. $\frac{32}{37} \cdot \frac{7}{8} = \frac{(32 : 8) \cdot 7}{37} = \frac{4 \cdot 7}{37} = \frac{28}{37}$

und $\frac{33}{35} \cdot \frac{7}{8} = \frac{33}{(35 : 7) \cdot 8} = \frac{33}{5 \cdot 8} = \frac{33}{40}$.

2. Zusaz.

Die Multiplikation zweier ächten Brüche giebt ein Produkt, das kleiner ist, als einer von den Faktoren. Man nehme einen Bruch zum Multiplikandum, welchen man will, so zeigt der Multiplikator iedesmal an, daß man das Multiplikandum nicht ganz, sondern nur etwa $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ rc. nehmen soll, um das Produkt zu erhalten. So ist die Hälfte von einem halben Fusse $\frac{1}{4}$mal genommen $= \frac{1}{16}$ Fus.

3. Zusaz.

Eine ganze Zahl multiplicirt man mit einem Bruch und umgekehrt (§. 32. weil es auf die Ordnung der Faktoren auch bei Brüchen nicht ankommt), einen Bruch mit einer ganzen Zahl, wenn man den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirt und den Nenner behält.

 Z. B.

z. B. $24 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24 \cdot 3}{5} = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$, und $\frac{7}{8} \cdot 5 = \frac{7 \cdot 5}{8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$ (§. 46.). Auch wird eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt, wenn man den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl dividirt und den Zähler behält. Doch ist dieses Verfahren nur dann vortheilhaft, wenn die Division aufgeht. z. B. $5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{20 : 5} = \frac{1}{4}$ und $\frac{5}{18} \cdot 6 = \frac{5}{18 : 6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ (§. 46.). Auch hier muß das Produkt kleiner werden als die ganze Zahl *).

4. Zusatz.

Soll man gemischte Zahlen multipliciren, so verwandle man sie nach §. 66. Zusatz 2. in unächte Brüche, z. B. $(2\frac{3}{4}) \cdot (6\frac{2}{3}) = \frac{11}{4} \cdot \frac{20}{3} = \frac{11 \cdot 20}{4 \cdot 3} = \frac{220}{12} = 18\frac{4}{12} = 18\frac{1}{3}$.

5. Zu-

*) Daß die Produkte aus Brüchen kleiner sind, als einer von den Faktoren ist, kann man sich auch auf folgende Art erläutern. Wenn man 1 mit 1 multiplicirt, so ist das Produkt ebenfalls 1; aber 2 . 1 giebt zum Produkte 2 u. s. f. Um so mehr muß nun 2 . 2 ein größeres Produkt geben als 1 . 1. Nun denke man sich das Multiplikandum und den Multiplikator kleiner als 1: so muß auch das Produkt kleiner, als 1, ja kleiner als einer von den beiden Faktoren werden. So ist z. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Hier soll man $\frac{1}{2}$ nicht 1 mal nehmen, sonst würde das Produkt $= \frac{1}{2}$, sondern $\frac{1}{2}$ ein halbmal, folglich ist das Produkt $= \frac{1}{4}$ also kleiner als $\frac{1}{2}$. Eben so wenn man eine ganze Zahl mit einem Bruche multipliciren soll, ist das Produkt kleiner als die ganze Zahl. Es ist z. B. $6 \cdot 4 = 24$; $6 \cdot 2 = 12$; $6 \cdot 1 = 6$ (§. 32.). Wird aber der Multiplikator kleiner als 1. z. B. $\frac{1}{2}$, so kann das Produkt nicht mehr 6, sondern es muß kleiner seyn. Denn soll 6 mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt werden, so soll 6 nicht ein ganzes mal, sondern nur $\frac{1}{2}$ mal genommen werden, folglich ist $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$; folglich ist der Multiplikator 1 die Gränze. Alle Produkte, die durch eine ganze Zahl als Multiplikandum und durch einen größern Multiplikator als 1 entstehen, sind größer als einer von den Faktoren; hingegen alle Produkte aus einer ganzen Zahl und einem Bruche, sind kleiner als die ganze Zahl.

5. Zusaz.

Der Begrif von der Multiplikation läßt sich auch auf folgende Art ganz allgemein so ausdrüken: aus einem Faktor entsteht das Produkt auf eben die Art, als aus der Einheit der andere Faktor. Der Saz auf diese Art ausgedrükt, kann auch auf die Brüche angewandt werden. Z. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Aus 1 entsteht $\frac{1}{2}$, wenn man die Hälfte davon nimmt, und eben so entsteht aus $\frac{3}{4}$ das Produkt $\frac{3}{8}$. Und umgekehrt: wie aus $\frac{1}{2}$ die 1 entsteht, so entsteht auch aus $\frac{3}{8}$ die Zahl $\frac{3}{4}$. Folglich ist auch ein Faktor so vielmal in der Einheit enthalten, als das Produkt in dem andern Faktor.

D. Division.

Aufgabe.

§. 70. Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.

Auflösung.

Man wende den Divisor um, so daß der Nenner zum Zähler und der Zähler zum Nenner wird, und multiplicire die Brüche wie im §. 69., so ist das gefundene Produkt der gesuchte Quotient.

Beispiel.

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}.$$

Beweis.

Wenn man untersucht, wie vielmal 1 in $\frac{3}{5}$ enthalten ist, so findet man $\frac{3}{5}$mal, aber 1 nicht ganz, sondern $\frac{3}{5}$ von 1 sind darin enthalten. Untersucht man ferner, wie vielmal $\frac{1}{7}$ in 1 enthalten ist, so findet man 7mal öfter, d. i. $7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$mal. Endlich wie vielmal $\frac{4}{7}$ in $\frac{3}{5}$ enthalten ist, so findet man 4mal weniger als $\frac{1}{7}$; also $\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$mal.

$\frac{21}{30}$mal. Da nun nach dem Begriffe der Division die Zähler und Nenner in einander hätten dividirt werden sollen, solches aber nur dann bequem angeht, wenn die Divisionen aufgehen, so war es einerlei, daß anstatt der Division die Multiplikation mit verkehrtem Multiplikator gewählt wurde, denn das Dividendum ist so vielmal vermehrt worden, als der Nenner angiebt, aber auch so vielmal vermindert, als der Zähler es verlangt (§. 46.), folglich ist die Auflösung richtig.

1. Zusaz.

Haben die gegebenen Brüche einerlei Benennung, oder sind sie auf solche gebracht nach §. 64.; so dividire man blos den Zähler des Dividendi mit dem Zähler des Divisors. Z. B. $\frac{8}{12} : \frac{2}{12} = 4$.

2. Zusaz.

Man kann der Abkürzung wegen bei einigen Fällen, vermöge des §. 46., von der im §. gegebenen Regel abweichen, nehmlich:

Erster Fall. Wenn die Brüche ungleiche Nenner haben, und des Divisors Zähler in des Dividendi Zähler, und eben so des Divisors Nenner in des Dividendi Nenner aufgeht: so dividire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Der erste Quotient ist der Zähler, der andere aber der Nenner des gesuchten Quotienten. Z. B. $\frac{21}{40} : \frac{3}{8} = \frac{21:3}{40:8} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$.

Zweiter Fall. Geht unter der vorigen Bedingung die eine Division allein, die andere aber nicht auf: so lasse man die Zahl, welche mit dem Divisor nicht aufgehen würde, unverändert, und multiplicire was die Division der andern Zahl giebt,

giebt, mit derjenigen, womit man die erste hätte dividiren müssen.

Beispiele.

$\frac{12}{17} : \frac{2}{5} = \frac{(12:2) \cdot 5}{17} = \frac{6 \cdot 5}{17} = \frac{30}{17} = 1\frac{13}{17}$.

oder $\frac{15}{48} : \frac{7}{12} = \frac{15}{(48:12) \cdot 7} = \frac{15}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$.

3. Zusatz.

1. Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man sie mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und das Produkt mit dem Zähler dividirt.

Z. B. $126 : \frac{4}{5} = 126 \cdot 5 : 4 = 157\frac{1}{2}$

denn
```
       126
         5
   4)  630 | 157 2/4 = 157 1/2
       4
       23
       20
        30
        28
         2
```

Oder: man kehrt den Bruch um, verwandelt die ganze Zahl in einen unächten Bruch und multiplicirt.

Z. B. $126 : \frac{4}{5} = \frac{126}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{126 \cdot 5}{1 \cdot 4} = \frac{630}{4} = 157\frac{1}{2}$.

2. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit dem Divisor multiplicirt und den Zähler behält. Denn so vielmal wird der Bruch kleiner, als man seinen Nenner grösser macht (§. 46.).

Z. B. $\frac{15}{32} : 5 = \frac{15}{32 \cdot 5} = \frac{15}{160} = \frac{3}{32}$

oder $\frac{15}{32} : 5 = \frac{15}{32} : \frac{5}{1} = \frac{15}{32} \cdot \frac{1}{5} = \frac{15 \cdot 1}{32 \cdot 5} = \frac{15}{160} = \frac{3}{32}$.

Wenn der Divisor im Zähler des Bruchs aufgeht: so dividire man ihn damit und behalte den Nenner (§. 46.). Im vorigen Beispiele: $\frac{15}{32} : 5 = \frac{15:5}{32} = \frac{3}{32}$.

4. Zusaz.

Soll man gemischte Zahlen dividiren, so verwandle man sie nach §. 66. 2. Zus. in unächte Brüche. Z. B. $(6\frac{1}{4}) : (4\frac{2}{5}) = \frac{25}{4} : \frac{22}{5} = \frac{25}{4} \cdot \frac{5}{22} = \frac{25 \cdot 5}{4 \cdot 22} = \frac{125}{88} = 1\frac{37}{88}$.

5. Zusaz.

Wenn man einen Bruch oder auch eine ganze Zahl mit einem ächten Bruche dividirt, so wird der Quotient grösser als das Dividendum. Denn man multiplicirt das Dividendum mit einer grössern Zahl, als mit welcher man es nachher dividirt. Ist aber der Divisor eine ganze Zahl oder ein unächter Bruch, so findet man das Gegentheil *).

6. Zusaz.

Auch bei Brüchen gilt der Saz: der Divisor ist so oft im Dividendo, als die Einheit im Quotient enthalten. Denn $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$. Nun ist $\frac{1}{4}$, d. i. $\frac{3}{12}$ so oft in $\frac{2}{3}$ oder $\frac{8}{12}$, als 1 oder $\frac{3}{3}$ in $\frac{8}{8}$.

Anmerkung.

Multiplikation und Division dienen ebenfalls auch bei den Brüchen einander zur Probe.

Erklärung.

§. 71. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner, beide für sich betrachtet, schon Brüche sind, nennt man einen

*) Was in *) zum §. 69. 3. Zusaz von der Multiplikation ist bemerkt worden, kann auch auf die Division, aber von der umgekehrten Wirkung verstanden, angewendet werden.

einen gebrochenen oder irregulären Bruch, wie z. B. $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$ und $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$.

Zusaz.

Ein gebrochener Bruch $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$ ist mit dem Quotienten $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ einerlei.

Denn $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{3} : \frac{8}{7}$ (§. 45.) und $\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 3}$ $= \frac{5}{3} : \frac{8}{7}$ (§. 70.), also auch $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{8} : \frac{3}{7}$.

Von den
Decimalbrüchen insbesondere.

Erklärung.

§. 72. Brüche, die keine andern Nenner als zehen, oder ein Produkt von Zehen in Zehen haben, werden zehentheilige oder Decimalbrüche genannt. Also ist der Nenner eines Decimalbruches 1 mit einer oder mehrern Nullen, und das Ganze ist in 10, 100, 1000, 10000 :c. gleiche Theile getheilt. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{26}{1000}$, $\frac{327}{100}$, $\frac{246789}{10000}$:c. Da die lezten beiden Brüche unächte Brüche sind, so sieht man leicht, daß nach der Division mit dem Nenner, der Zähler so viel Zahlzeichen erhalten wird, als der Nenner Nullen hat. Z. B. $\frac{327}{100} = 3\frac{27}{100}$; $\frac{246789}{10000}$ $= 24\frac{6789}{10000}$ (§. 43. 1. Zus.), folglich kann man den Nenner allemal wissen, wenn der Zähler gegeben, oder der Nenner des Bruchs genannt wird, ohne daß er jedesmal, wie bei den gemeinen Brüchen, dem Bruche beigefügt werden darf, weil er aus so vielen Nullen besteht,

besteht, als der Zähler Zahlzeichen hat. Damit aber die mit den Decimalbrüchen verbundnen ganzen Zahlen nicht zu den Brüchen gezählt werden, so sezt man zwischen beide ein Komma (,) auch wohl einen Punkt (.) und schreibt die Decimalbrüche übrigens wie ganze Zahlen. Also haben $4\frac{26}{100}$ und 4,26 einerlei Werth, und werden auf gleiche Art gelesen. Sind keine ganzen Zahlen vorhanden, so schreibt man in die Stelle der Einer eine Null mit dem Komma, und läßt die Zahlzeichen des Decimalbruchs von der linken zur Rechten folgen. Fehlen bei den Decimalbrüchen Zahlzeichen für eine oder mehrere Stellen, so füllt man sie mit Nullen an, wie bei den ganzen Zahlen. Ueberhaupt liegt bei den Decimalbrüchen das gemeine Gesez der Zahlen zum Grunde, mit dem Unterschiede, daß die Zahlzeichen der Decimalbrüche in der ersten Stelle von der linken gegen die Rechte Zehntheilchen der Einheit, in der zweiten Hundertheilchen der Einheit, in der dritten Tausendtheilchen der Einheit ꝛc. gelten; da hingegen bei den ganzen Zahlen, das Zahlzeichen in den ersten Stellen nach den Einern von der Rechten gegen die linke gerechnet, zehnfache Einheiten oder Zehner ꝛc. anzeigt. Folgende Tabelle kann zur allgemeinen Uebersicht und zu der Kenntniß der Werthe nach den Stellen der Decimalbrüche dienen.

6, sind sechs Ganze
6,1 — — und 1. Zehentheilchen
6,01 — — — 1 Hunderttheilchen
6,001 — — — 1 Tausendtheilchen
6,0001 — — 1 Zehentausendtheilchen
6,00001 — — 1 Hunderttausendtheilchen
6,000001 — — 1 Milliontheilchen
6,0000001 — — 1 Zehnmilliontheilchen

Eben so

0,2 sind 0 Ganze und 2 Zehentheilchen
0,02 — — — 2 Hunderttheilchen

Hieraus sieht man, wenn ein Decimalbruch geschrieben werden soll, und sein Nenner durch Worte ausgedrükt wird, daß man das Zahlzeichen der kleinsten Theile der Einheit im Zähler um so viel Stellen von der Stelle der Einer nach der Rechten zu abrüken muß, als der Nenner Nullen enthält.

1. Zusaz.

Da die erste Stelle nach dem Komma gegen die Rechte Zehntheilchen, d. i. die Einheit ist in zehen gleiche Theile getheilt, die andere Stelle aber Hunderttheilchen, d. i. die Einheit ist in hundert gleiche Theile getheilt, enthält: also iede Einheit in der zweiten Stelle 10mal kleiner ist, als in der ersten, folglich in ieder folgenden Stelle die Einheit einen 10mal kleinern Werth hat, als in den vorhergehenden, so folgt: alle Zahlzeichen nach dem Komma, welche ächte Decimalbrüche bezeichnen, gehören zu verschiedenen abnehmenden Decimalordnungen. Z. B. $24{,}5430278 = \frac{245430278}{10000000} = 24{,}\frac{5430278}{10000000} = 24 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{7}{1000000} + \frac{8}{10000000}$.

2. Zu-

2. Zusaz.

Ist die Stelle der Einer durch das Decimalzeichen (,) einmal bestimmt, so kann man einem Decimalbruche rechter Hand so viele Nullen beyfügen, als man will, ohne daß der Werth des Bruchs geändert wird, wie man aus dem vorhergehenden leicht begreift. So ist z. B. 0,24 = 0,240 = 0,2400 = 0,24000 ꝛc. Demnach ist 0,240 = $\frac{240}{1000}$; 0,2400 = $\frac{2400}{10000}$ ꝛc. Alle diese Brüche aber sind = $\frac{24}{100}$, oder nach §. 72. = 0,24.

Man kann daher Decimalbrüche auf eine sehr leichte Art unter einerlei Benennung bringen: man hängt nämlich rechter Hand an dieienigen Brüche, welche wenigere Decimalstellen enthalten als andre, so viele Nullen, bis die gegebnen Brüche gleich viele enthalten. Sind die Brüche gegeben 0,6; 0,045; 0,2301; 0,00045; so erhält man an ihrer Statt folgende Brüche von einerlei Werth mit den gegebenen: 0,60000; 0,04500; 0,23010 und 0,00045.

3. Zusaz.

Jede ganze Zahl kann mit beigefügten Nullen in der Form eines Decimalbruches geschrieben werden, nur müssen die Nullen rechter Hand, und zwischen diese und dem Zahlzeichen der ganzen Zahl ein Komma gesezt werden. Z. B. 12 = 12,0 = $\frac{120}{10}$, d. i. 120 Zehntheile; 12,00 = $\frac{1200}{100}$, d. i. 1200 Hunderttheile.

4. Zusaz.

Will man wie bei den ganzen Zahlen den Namen einer Decimalstelle suchen, so rechne man die Einer mit, und man findet z. B. in der 5ten Stelle Zehntausendtheilchen *)

Auf=

*) Regiomontan aus Königsberg in Franken war der erste, der die Idee von den Decimalbrüchen entwikelte und den Gebrauch der=

Aufgaben.

§. 73. Zahlen mit Dezimalbrüchen zu addiren, und von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

Man seze die Zahlzeichen der Zahlen so unter einander, daß die von einerlei Ordnung in eine Reihe zu stehen kommen, und verfahre übrigens wie bei den ganzen Zahlen. In der Summe und der Differenz seze man das Komma rechts den Einern der ganzen Zahl.

Addition	Subtraktion
12,054	24,0532
4,6	6,594067
126,5407	Differenz 17,459133
41,125078	
2,0001	
Summe 186,319878	

Beweis.

Wenn man nach §. 72. 2. Zus. die Decimalbrüche unter einerlei Benennung bringt, und sie als ganze Zahlen betrachtet; so darf man nur die Zähler addiren oder subtrahiren, und die Nenner behalten. Weil aber die fehlenden Stellen in den Zählern nur Nullen bekommen, wenn sie auf einerlei Benennung gebracht werden: so ist auch die Summe und Differenz richtig gefunden, da die Zahl-

derselben bekannt machte. Er war einer der vorzüglichsten Mathematiker des 15ten Jahrhunderts.

Der Decimalbrüche kann man sich ausser dem Gebiete der Mathematik auch bei den Rechnungen des gemeinen Lebens bedienen. Ihr Gebrauch ist leicht und vortheilhaft, besonders bei geometrischen Berechnungen.

Zahlzeichen, die zu einerlei Decimalordnung gehören, addirt oder subtrahiret sind.

§. 74. Zahlen mit Decimalbrüchen zu multipliciren und zu dividiren.

Auflösung.

1. Multiplikation. Man sezt den Multiplikator unter das Multiplikandum und sieht die Zahlen für ganze Zahlen an. Dem Produkte giebt man so viele Decimalstellen als beide Faktoren zusammen enthalten. Besteht das Produkt aus weniger Stellen, so fügt man demselben linker Hand so viele Nullen bei, bis die Anzahl so groß ist, wie in beiden Faktoren zusammen, und sezt voran noch eine Null mit dem Komma.

Fälle.

a)	b)	c)
6,423	0,00045	1,25
0,26	4,3	1,6
38538	135	750
12846	180	125
1,66998	0,001935	2,000

Beweis.

Da nach der gegebenen und dem Begriffe der Multiplikation der Brüche angemessenen Auflösung Zähler mit Zähler multipliciret werden: so hat man auch zugleich das Produkt der Nenner gefunden, welches in jedem Falle so viele Nullen enthalten muß, als beide Zähler zusammen genommen d. i. mit einer Reihe daranhängender Nullen, weil jeder Nenner für sich so viele Nullen enthält, als der Zähler Zahlzeichen hat (§. 72.) folglich hat das Verfahren seine Richtigkeit.

2. Division. Man untersucht: a) ob das Dividendum eben so viele Decimalstellen hat, als der Divisor,

wo

wo nicht, so füge man demselben so viele Nullen bei als nöthig sind, (§. 72. 2. Zus.) b) ob, wenn man beide als ganze Zahlen betrachtet, das Dividendum grösser sei als der Divisor, wo nicht, so seze man an das Dividendum so viele Nullen, als erforderlich sind.

Nun dividire man, wie bei ganzen Zahlen, so weit, bis man bei der gemeinen Division aufhört, und gebe dem Quotienten von der Rechten gegen die Linke so viele Decimalstellen als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derselben im Divisor von der Anzahl im Dividendo subtrahirt.

Fälle.

a) 8,448 : 9,6

```
9,6) 8,448 | 0,88
     768
     ---
      768
      768
      ---
```

b) 6,495 : 2573,4

```
2573,4) 6,4950 | 0,002
        5 146,8
        -------
  Rest  1 348 2
```

c) 5,49 : 2,57

```
2,57) 5,49 | 2,
      5 14
      ----
 Rest  35
```

d) 0,42 : 8,41

```
8,41) 0,4200 | 0,04
        3364
        ----
   Rest  836
```

e) 15,8 : 6,247

```
6,247) 15,800 | 2
       12 494
       ------
        3 306
```

f) 86,29 : 431,416

```
431,416) 86,2900 | 0,2
         86,2832
         -------
              68
```

In den Fällen, wo ein Rest bleibt, kann man den Quotienten noch genauer finden, wenn man dem Reste eine Null beyfügt, und weiter dividirt; denn der Werth des Bruchs wird nicht geändert, weil man durch diese 0 den Zähler mit 10 multiplicirt und dadurch wird auch der Nenner zugleich mit 10 multipliciret, weil er allemal so

viele Nullen bekommt, als der Zähler Zahlzeichen enthält. Dies kann man nun so lange fortsezen, bis die Division aufgeht, oder bis man glaubt, den Quotienten genau genug gefunden zu haben. So würde man mit dem Beispiele n. c. auf folgende Art verfahren.

```
2,57)  5,49 | 2,136186 . . . .
       514
        350
        257
         930
         771
         1590
         1542
           480
           257
           2230
           2056
            1740
            1542
             198
```

Geht die Division nicht auf, so kann man dem Quotienten den Rest beifügen. Der Rest aber ist ein Bruch, dessen Zähler der Rest, und der Nenner der Divisor mit so vielen Nullen ist, als man im Quotienten Decimalstellen erhalten hat. Z. B. der vorige Quotient ist $= 2,136186 + \frac{198}{257000000}$.

Beweis.

Da durch das Beifügen der Nullen im Dividendo die Brüche auf einerlei Benennung gebracht (§. 72. 2. Zus.), und alsdenn wie ganze Zahlen angesehn werden können; so sind die hierher gehörigen Fälle schon durch die gemeine Division bewiesen. Die Fälle, wenn das Dividendum eben so viel oder mehrere Decimalstellen als der Divisor hat,

hat, lassen sich auf folgende Art beweisen: n. a. 8,448 : 9,6 $= \frac{8448}{1000} : \frac{96}{10} = \frac{8448 \cdot 10}{96 \cdot 1000} = \frac{8448}{96} \cdot \frac{1}{100} =$ 0,88. Auf eben diese Art lassen sich die übrigen hieher gehörigen Fälle rechtfertigen.

1. Zusaz.

Ist das Dividendum eine ganze Zahl, der Divisor aber eine ganze Zahl mit angehängten Decimaltheilen, und die Division geht nicht auf; so hängt man dem Reste so viel Nullen an, als man für nöthig findet, oder sezt beim jedesmaligen Dividiren eine Null zu. Dem Quotient giebt man von der Rechten gegen die Linke so viele Decimalstellen, als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derselben im Divisor, von der, an den Rest gehängten Anzahl subtrahirt. Z. B. 5432 : 2,4 = 2263,3 3 . . . . . .

2. Zusaz.

Eine Zahl mit Decimalstellen multipliciret und dividiret man mit 10, 100, 1000, 10000 rc., wenn man das Komma im Multiplikando so viele Stellen gegen die rechte Hand rükt, und im Dividendo so viele Stellen nach der Linken, als der Multiplikator oder Divisor Nullen neben der 1 hat. Wird z. B. 12,45967 mit 10000 multiplicirt, so ist das Product = 124596,7; 24,56 . 100 = 2456; auch 124596,7 : 10000 = 12,45967; 2456 : 100 = 24,56.

§. 75. Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

Man seze an den Zähler des gemeinen Bruchs rechter Hand ein Komma, und nach demselben so viele Nullen als man für nöthig findet, und dividire mit dem Nenner.

Ist der Bruch ein ächter Bruch, so ist der Quotient 0 Ganze, in Decimaltheilen aber dem Werthe des Bruchs entweder gleich, oder doch beinah gleich (§. 45.). Bei einem unächten Bruche hingegen enthält der Quotient entweder eine ganze Zahl allein, oder eine ganze Zahl mit Decimalstellen.

Beispiele.

1) Wo der Quotient dem Bruche gleich ist.

$\frac{1}{2} = 2)\ 1{,}0\ |\ 0{,}5$ $\qquad$ $\frac{4}{5} = 5)\ 4{,}0\ |\ 0{,}8$

$\quad\ \ 10 \qquad\qquad\qquad\qquad 40$

denn $\frac{1}{2} = \frac{10}{10} : 2 = 0{,}5$ und $\frac{4}{5} = \frac{40}{10} : 5 = 0{,}8$.

so auch $\frac{3}{4} = \frac{300}{100} : 4 = 0{,}75$.

denn $4)\ 3{,}0\ |\ 0{,}75$

28

20

20

2) Wo der Quotient dem Bruche beinah gleich ist. Es sei

$\frac{2}{3} = 3)\ 2{,}0\ |\ 0{,}666\ldots\ldots$ $\qquad$ $\frac{1}{3} = 3)\ 1{,}0\ |\ 0{,}333\ldots\ldots$

18	9
20	10
18	9
20	10
18	9
2 Rest	1 Rest

Hieraus sieht man deutlich, daß in den beiden lezten Beispielen allemal ein Rest bleiben muß, man mag auch dividiren so weit man will. In den meisten Fällen wird es genügen, die Division zu endigen, wenn der Fehler kein Hundertmilliontheilchen beträgt. Sezt man zu dem Quotient noch den Rest als Zähler und den Divisor mit so vielen Nullen, als man dem Dividendo oder den iedes-

mali-

maligen Resten angehängt hat, als Nenner, so ist er genau so groß, als der gegebene gemeine Bruch. Einen solchen Rest aber kann man ohne Bedenken weglassen, weil er auf die Richtigkeit einer Rechnung wenig Einfluß hat. Man sieht wohl, daß es möglich ist, den Quotienten, oder, welches einerlei ist, den Decimalbruch so genau zu finden, daß der Unterschied von dem gemeinen Bruche kleiner ist, als ieder gegebene noch so kleine Bruch.

Zusaz.

Durch die Addition und Subtraktion zweier Decimalbrüche kann man sich von der Grösse des Unterschieds zwischen dem gemeinen und dem Decimalbruche von einerlei Werth auf folgende Art überzeugen:

1. Durch die Addition.

	Mit Zuziehung des Restes	Mit Weglassung des Restes
	$\frac{2}{3} = 0{,}666\frac{\frac{2}{3}}{1000}$	$\frac{2}{3} = 0{,}666666 \ldots\ldots$
	$\frac{1}{3} = 0{,}333\frac{\frac{1}{3}}{1000}$	$\frac{1}{3} = 0{,}333333 \ldots\ldots$
also $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$	$\frac{3}{3} = 1{,}000 \quad 3,$	$\frac{3}{3} = 0{,}999999 \ldots\ldots$

2. Durch die Subtraktion.

	Mit Zuziehung des Restes	Mit Weglassung des Restes
	$\frac{2}{3} = 0{,}666\frac{\frac{2}{3}}{1000}$	$\frac{2}{3} = 0{,}666666 \ldots\ldots$
	$\frac{1}{3} = 0{,}333\frac{\frac{1}{3}}{1000}$	$\frac{1}{3} = 0{,}333333 \ldots\ldots$
also $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$	$\frac{1}{3} = 0{,}333\frac{\frac{1}{3}}{1000}$	$\frac{1}{3} = 0{,}333333 \ldots\ldots$

Eben so läßt sich die Verwandelung der Brüche durch die Multiplikation und Division prüfen.

1. Durch die Multiplikation:

Da es nicht nothwendig ist, die Faktoren so unter einander zu sezen, wie in §. 74., so kann man verschiedner Vortheile wegen, die sich daraus herleiten lassen, die Zahlzeichen des Multiplikators unter die Zahlzeichen des Multiplikandi auf die Art sezen wie bey der Addition §. 73., so

so daß die ganzen Zahlen, oder an ihrer Stelle die Nullen, dann die Decimalstellen unter einander zu stehen kommen, wie es die abnehmenden Decimalordnungen erfordern, und dann die Multiplikation mit dem höchsten Zahlzeichen des Multiplikators anfangen, wenn keine ganze Zahlen vorhanden sind. Alsdann kommt das niedrigste Zahlzeichen des Produkts unter das niedrigste des Multiplikandi zu stehen. Die folgenden Partialprodukte rükt man um eine Stelle weiter zur Rechten, und verfährt übrigens wie bey der gewöhnlichen Multiplikation.

Beispiele.

$\frac{2}{3} = 0{,}666666\ldots.$
$\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots.$

```
                    0,1999998|
                       199999|8
                        19999|98
                         1999|998
                          199|9998
                           19|99998
2/3 · 1/3 = 2/9 = 0,2222217|77778
```

Verwandelt man $\frac{2}{9}$ in einen Decimalbruch, so findet man

```
9 ) 2,0 | 0,222222 ...
    18
    --
     20
     18
     --
     20 rc.
```

Im Produkte ist also das 6te Zahlzeichen zu klein, welches auch die folgenden nicht ergänzen. Die Ursache ist diese: da die Reste in den Faktoren weggelassen sind, so muß nothwendig das erste Zahlzeichen 8 im ersten Partialprodukte schon zu klein werden, folglich auch die übrigen, und daher ist auch das 6te im Totalprodukte zu klein. Der Fehler beträgt aber noch kein Milliontheilchen:

chen: also kann es auf die Richtigkeit der Berechnungen keinen großen Einfluß haben.

Man kann leicht begreifen, daß man den vorgesezten Zwek doch erreicht, wenn auch die Zahlzeichen der einzelnen Produkte rechts hinter dem Striche nicht ausgeschrieben wären. Dieses leitet auf die sogenannte abgekürzte Multiplikation, die man leicht aus beigefügtem Beispiele übersehen kann. Z. B.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} = 0,6666666 \\ \frac{1}{3} = 0,3333333 \\ \hline 0,1999998 \\ 199999 \\ 19999 \\ 1999 \\ 199 \\ 19 \\ \hline \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,2222217 \end{array}$$

Man multiplicire wie hier im Beispiele, nachdem man mit den Zehntheilen des Multiplikators multipliciret hat, das vorlezte Zahlzeichen im Multiplikando, und lasse sofort jedesmal ein Zahlzeichen des Multiplikandi, von der Rechten gegen die Linke weg. Damit man sich nicht irre, so streiche man die Zahlzeichen im Multiplikando, und Multiplikator durch, alsdenn weiß man jedesmal, mit welchem Zahlzeichen die Multiplikation anfängt. Eben so verhält man sich, wenn beide Faktoren ausser den Decimaltheilen noch ganze Zahlen enthalten. Auf diese Art weis man also, daß wenigstens die ersten 5 Decimalstellen richtig gefunden werden.

2. Durch die Division.

Man kann auf ähnliche Art, wie bei der Multiplikation allemal, wenn das erste Zahlzeichen des Quotienten gefunden ist, das niedrigste Zahlzeichen im Divisor weglassen.

sen. Die Befolgung dieser Regel giebt dann die abgekürzte *Division*.

z. B. 12,945786 : 5,214352.

12,945786 | 2,482723
5,214352
10,428704
―――――――
2,517082
5,21435
20,85740
―――――――
4,31342
52143
41,7144
―――――――
1,4198
5,214
10428
―――――――
3,770
521
3647
―――――――
123
52
104
―――――――
19
5
15
―――――――
4

Ist man des Verfahrens bei der abgekürzten Division nur einmal gewiß, dann ist es nicht nöthig, den Divisor bey jedem Theile des Quotienten, den man suchen will, unterzusezen, sondern man kann denselben wie gewöhnlich zur Seite schreiben, alsdenn wie bei der Multiplikation ein Zahlzeichen nach dem andern wegstreichen, und so die Division noch mehr abkürzen.

Die vollständige Auseinandersezung der abgekürzten Multiplikation und Division war für ein kurzes Lehrbuch

buch zu weitläuftig. Wer sich mit den vorhergehenden Gründen genau bekannt gemacht hat, wird auch diese Vortheile einsehen lernen. Vollständigen Unterricht findet man unter andern in Karstens Lehrbegrif der gesammten Mathematik 1. Theil 1. Band zweite Auflage S. 156 — 159.

Die Anwendung der Decimalbrüche bei geometrischen und andern Berechnungen wird in jedem Falle hinlänglich lehren, mit welcher Genauigkeit man sich ihrer bedienen müsse. Sie verschaffen im Rechnen und in der Anwendung Vortheile, die man durch den Gebrauch der gemeinen Brüche nicht erhalten kann.

V.

Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

Von den Reduktionen genannter Zahlen.

Erklärung.

§. 76.

Jede Zahl, bei welcher der Name der Einheit steht, heißt eine genannte Zahl (§. 4.) die Einheit kann man also als das Maas der Zahl betrachten. Da diese Einheiten aber an und für sich verschieden und nur selten unter das allgemeine Gesez unsers Zahlensystems gebracht sind: so ist es nöthig, daß man sich mit den Eigenschaften der Gegenstände näher bekannt macht, die durch Zahlen ausgedrükt werden. Die hieher gehörigen Eigenschaften der Gegenstände betreffen vorzüglich die Verschiedenheit der Maasse und Gewichte, die Werthe der Münzen, den Gehalt der Früchte, die

Dauer der Zeit ꝛc. Die Namen und Eintheilungen der Münzen, Gewichte, Maasse ꝛc. zu wissen, ist vorzüglich nothwendig, wenn man auf wirklich vorhandene Gegenstände Anwendungen der vorhin gegebenen theoretischen Rechnungsregeln machen will. Daß die Namen und Eintheilungen an sich willkührlich und in verschiedenen Staaten wirklich verschieden sind, weiß man schon aus der Erfahrung. Auch kommen bey den verschiedenen Gewerben noch besondre Eintheilungen der Maasse, Gewichte ꝛc. vor, die derjenige wissen muß, der nur irgend eine dahin einschlagende Berechnung anstellen will.

Hier werden einige Beispiele genügen, um die gebräuchlichsten Eintheilungen in den preußischen Staaten daran zeigen zu können. Unter die unentbehrlichsten gehören folgende:

Münzen. 1 Thaler gilt 24 Groschen, 1 Groschen 12 Pfennige.

Gewichte. 1 Centner enthält 110 Pfund, 1 Pfund 32 Loth, 1 Loth 4 Quentchen.

Nach einer andern Eintheilung aber:

1 Centner 110 Pfund, 1 Pfund 16 Unzen, eine Unze 8 Drachmen, 1 Drachme 3 Skrupel, 1 Skrupel 20 Gran.

Maasse. Unter den Längehruthen ist die Rheinländische die gewöhnlichste. Ihre Eintheilung ist: 1 Ruthe enthält 12 Fus, 1 Fus 12 Zoll, 1 Zoll 12 Linien. Die geometrische Eintheilung ist bequemer, weil sie mit dem Zahlensystem übereinstimmt, und vermittelst der Decimalbrüche vortheilhaft behandelt werden kann. Sie ist folgende: 1 Ruthe hält 10

Fus,

Fus, 1 Fus 10 Zoll, 1 Zoll 10 Linien, 1 Linie 10 Skrupel.

Durch diese Eintheilungen sind die Benennungen Decimal = und Duodecimalmaas entstanden *).

Zusaz.

Die angegebenen Eintheilungen enthalten die Zahlen, welche angeben, wie viel Einheiten der kleinern Art, Eine von der grössern Art ausmachen, so daß man Einheiten der kleinern Art in Einheiten der grössern verwandeln, oder überhaupt genannte Zahlen von einer gewissen Benennung auf einen andern Namen oder eine andre Benennung bringen kann. Diese Verwandelung selbst kann man Reduktion, und die Zahlen, deren man sich dazu bedient, Reduktionszahlen nennen.

Aufgaben.

§. 77. Eine genannte ganze Zahl auf einen grössern Namen zu bringen.

Auflösung.

Man dividire die gegebene Zahl mit der Reduktionszahl. Der Quotient erhält den grössern, und wenn ein Rest bleibt, den kleinern Namen. Man kann aber auch den Rest

*) Die hier bemerkten Eintheilungen sezen nicht völlig in den Stand, alle vorkommenden Fälle der praktischen Arithmetik behandeln zu können, ob sie gleich völlig hinreichend sind, durch ihren Gebrauch die vier Rechnungsarten in genannten Zahlen zu erläutern. Im folgenden werden Tafeln mitgetheilt werden, welche die, für Infanterie- und Cavallerieofficiere nöthigen Eintheilungen der Gewichte und Maasse 2c. enthalten.

Rest in der Form eines Bruchs mit dem Quotienten zugleich mit dem grössern Namen ausdrüken.

Z. B. 426 Groschen, wieviel sinds Thaler?

```
Reduktionszahl 24) 426 | 17 18/24 Thlr. = 17 Thlr. 18 Gr.
                   24
                   ---
                   186
                   168
                   ---
                    18
```

Ist die gegebene Zahl von der Art, daß man sie stufenweise auf den nächst grössern Namen bringen muß: so darf man sich nur jedesmal die Reduktionszahl merken, mit derselben dividiren, und übrigens, wie vorhin verfahren.

Z. B. 1264 Pf., wie viel betragen sie in Thlr. und Gr. &c.?

```
12) 1264 |     105 | 4 Thlr.
    12     24) 96
    ---        ---
     64          9 Gr.
     60
     ---
      4 Pf.
```

Also 1264 Pf. betragen 4 Thlr. 9 Gr. 4 Pf.

724569218 Skrupel im Duodecimalmaasse sollen in Ruthen, Fus, Zoll und Linien ausgedrükt werden.

```
12) 724569218 | 12) 60380768 | 12) 5031730 | 12) 419310 | 34942 Ruthen
    72              60              48            36
    --              --              --            --
     45              38              23            59
     36              36              12            48
     --              --              --            --
      96              20             111           113
      96              12             108           108
      --              --             ---           ---
       92              87              37            51
       84              84              36            48
       --              --              --            --
        81              36              13            30
        72              36              12            24
        --              --              --            --
         98              8 Linien        10 Zoll       6 Fus
         96
         --
          2 Skrupel
```

Also 724569218 Skrupel betragen 34942 Ruthen, 6 Fus, 10 Zoll, 8 Linien und 2 Skrupel.

Sind

Sind die 724569218 Skrupel Decimalmaas: so ist die Reduktionszahl 10, folglich darf man nur von den gegebenen Skrupeln von der Rechten gegen die Linke ein Zahlzeichen für den nächstfolgenden grössern Namen abschneiden, so bleiben die übrigen für den grösten Namen und es sind 724569218 Skrupel = 72456 Ruthen, 9 Fus, 2 Zoll, 1 Linie und 8 Skrupel.

45628159 Gran, wieviel betragen sie in Gewichten von grössern Namen?

```
2) 45628159 | 3) 2281407 | 8) 760469 | 16) 95038 | 11) 5941 | 54 Centner
   4      0     21           72           80           55 0
   --           --           --           --           --
    5            18           40           150           44
    4            18           40           144           44
   --           --           --           ---           --
    16            14           46           65        1 Pfund
    16            12           40           64
    --            --           --           --
      2            20           69           18
      2            18           64           16
     --            --           --           --
      8             27     5 Drachmen    2 Unzen
      8             27
     --             --
      15          0 Skrupel
      14
      --
      19 Gran
```

Also 45628159 Gran machen 54 Centner, 1 Pfund, 2 Unzen, 5 Drachmen, 0 Skrupel, 19 Gran.

Auf eine ähnliche Art kann man eine Menge Quentchen rc. auf grössere Namen, z. B. Pfund, Centner rc. bringen.

§. 78. Eine genannte ganze Zahl auf einen kleinern Namen zu bringen.

Auflösung.

Man multiplicire die gegebene Zahl mit der Reduktionszahl.

Z. B. 426 Thlr., wieviel machen diese in Groschen?

```
   426
    24
  ----
  1704
  852
 -----
 10224 Gr.
```

Ist die gegebene Zahl unter verschiednen Namen ausgedrükt; so multiplicire man mit der iedesmal dazu erforderlichen Reduktionszahl, und addire zum Produkte dasienige in der gegebenen Zahl, was mit dem Produkte einerlei Einheit hat.

Z. B. 26 Thlr. 12 Gr. 6 Pf. sollen in Pf. ausgedrükt werden.

```
    26  Thlr.
    24  Reduktionszahl
   ---
   104
   52
   ---
   624 ⎫
  + 12 ⎬ Gr.
   ---  ⎪
   636 ⎭
    12  Reduktionszahl
   ---
  1272
  636
  ----
  7632 ⎫
   + 6 ⎬
  ---- ⎪
  7638 ⎭
```

Also 26 Thlr. 12 Gr. 6 Pf. = 7638 Pf.

34942 Ruthen, 6 Fus, 10 Zoll, 8 Linien, 2 Skrupel, Duodecimalmaas, in Skrupeln auszudrüken

```
 34942  Ruthen
    12  Reduktionszahl
 -----
 69884
34942
------
419304 ⎫
    +6 ⎬ Fus
------ ⎪
419310 ⎭
    12
------
838620
419310
-------
5031720 ⎫
    +10 ⎬ Zoll
------- ⎪
5031730 ⎭
     12
--------
10063460
5031730
--------
60380760 ⎫
      +8 ⎬ Linien
-------- ⎪
60380768 ⎭
      12
---------
120761536
60380768
---------
724569216 ⎫
       +2 ⎬ Skrupel
--------- ⎪
724569218 ⎭
```

Also 34942 Ruthen, 6 Fus, 10 Zoll, 8 Linien, 2 Skrupel = 724569218 Skrupel. Sollen im Decimalmaasse 72456 Ruthen, 9 Fus, 2 Zoll, 1 Linie, 8 Skrupel, in lauter Skrupeln ausgedrükt werden; so darf man nur die Anzahl der Fusse, Zolle, Linien und Skrupel, den

den Ruthen beifügen; also 724569218 Skrupel. Verglichen mit §. 77. und §.

Zusatz.

Auch gebrochene genannte Zahlen werden auf einen grössern oder kleinern Namen gebracht, wenn man im ersten Falle mit der Reduktionszahl den Bruch dividirt, im andern Fall multiplicirt und dem Resultate den höhern oder niedrigern Namen giebt.

1. Nach §. 77. 18 Gr. $= \frac{18}{24}$ Thlr. $= \frac{3}{4}$ Thlr.; eben so 8 Pf. $= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ Gr.; $\frac{2}{3}$ Gr. aber $= \frac{2}{3} : 24 = \frac{2}{3 \cdot 24}$ Thlr. (§. 70. Zusaz 3. N. 2.) $= \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$ Thlr. Ferner $\frac{4}{5}$ Fus im Duodecimalmaas $= \frac{4}{5} : 12$ Ruthen $= \frac{4}{5 \cdot 12}$ (§. 70. Zus. 3. N. 2.) $= \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ Ruthe. Endlich sind 5 Decimalfus $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$ Ruthen. Und so auch 5 Decimallinien $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ Zoll $= 0,5$ Zoll $= \frac{0,5}{10}$ Fus $= 0,05$ Fus $= \frac{0,05}{10}$ Ruthen $= 0,005$ Ruthen.

2. Umgekehrt nach §. 78. $\frac{2}{9}$ Centner $= \frac{2}{9} \cdot 110$ Pfund $\frac{220}{9}$ Pfund $= 24\frac{4}{9}$ Pfund: weil aber $\frac{4}{9}$ Pfund $= \frac{4}{9} \cdot 32$ Loth $= \frac{128}{9} = 14\frac{2}{9}$ Loth, und $\frac{2}{9}$ Loth $= \frac{2}{9} \cdot 4$ Quentchen $= \frac{8}{9}$ Quentchen: so ist $\frac{2}{9}$ Centner $= 24$ Pfund 14 Loth $\frac{8}{9}$ Quentchen (§. 69. Zus. 3.).

Ferner $\frac{3}{5}$ Ruthen Duodecimalmaas $= \frac{3}{5} \cdot 12 = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ Fus; aber $\frac{1}{5}$ Fus $= \frac{1}{5} \cdot 12 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ Zoll; $\frac{2}{5}$ Zoll aber $= \frac{2}{5} \cdot 12 = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ Linien: so ist $\frac{3}{5}$ Ruthen Duodecimalmaas $= 7$ Fus 2 Zoll $4\frac{4}{5}$ Linien, ebenfalls im Duodecimalmaas.

Endlich $\frac{4}{5}$ Ruthen Decimalmaas aber $= 0,8$ Ruthen $= 8$ Fus. Eben so $\frac{3}{4}$ Ruthen $= 0,75$ Ruthen $=$ 7 Fus 5 Zoll.

§. 79. Unter mehrern Namen ausgedrükte genannte Zahlen zu addiren, und zu subtrahiren.

Auf-

Auflösung.

Man seze die Zahlen, so einerlei Namen haben, in eine Columne unter einander, und nun

1. Bei der Addition, bringe man die Summe der Columne, in welcher die Zahlen mit dem kleinsten Namen stehen, vermittelst der Division mit der Reduktionszahl auf den nächst grössern Namen, und schreibe den Rest mit dem kleinern Namen unter die addirte Columne, und addire den Quotienten zu der Columne, in welcher die Zahlen mit dem nächst grössern Namen stehen. Ist die Summe kleiner, als die Reduktionszahl, so schreibe man sie unter die Columne ꝛc.

24 Thlr.	5 Gr.	8 Pf.
6 —	12 —	9 —
4 —	22 —	11 —
1	2	
35 Thlr.	24) 41 | 1	12) 28 | 2
	24	24
	17 Gr.	4 Pf.

Also ist die Summe = 35 Thlr. 17 Gr. 4 Pf.

16 Ruth.	11 Fus	4 Zoll	8 Lin.	Duodec. M.
4 —	9 —	11 —	10 —	
1	1	1		
	12) 21 | 1	12) 16 | 1	12) 18 | 1	
	12	12	12	
21 Ruth.	9 Fus	4 Zoll	6 Linien.	

2. Bei der Subtraktion schreibe man die Zahlen unter einander wie bei der Addition, und borge, wenn es nöthig ist, eine Einheit bei der Zahl in der Columne von dem nächst grössern Namen. Die geborgte Einheit ist also groß, wie die jedesmalige Reduktionszahl.

	24	12
48. Thlr.	7. Gr.	8 Pf.
12 —	18 —	11 —
35 Thlr.	12 Gr.	9 Pf.

	10	10	
12. Ruthen	6. Fus	5 Zoll	Decimalmaas
4 —	9 —	8 —	
7 Ruthen	6 Fus	7 Zoll	

§. 80. Eine unter mehrern Namen ausgedrükte genannte Zahl mit einer ungenannten zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire die genannten Zahlen von dem kleinsten Namen bis zum grösten, und dividire in das Produkt mit der dazu gehörigen Reduktionszahl. Den Quotient addire man zu dem nächst höhern Produkte.

```
   28 Thlr.          15 Gr.         5 Pf.
                              × 6
 --------------------------------------------
   168                90       12) 30 | 2
     3                 2           24
 -----               ----         ----
 171 Thlr.       24) 92 | 3         6 Pf.
                     72
                    ----
                     20 Gr.
```

Also ist das Produkt 171 Thlr. 20 Gr. 6 Pf.

Oder:

Man reducire das Multiplikandum auf den kleinsten Namen §. 78., multiplicire alsdenn die erhaltene Zahl mit dem Multiplikator, und bringe das Produkt vermittelst der Reduktionszahlen auf den grösten Namen §. 77.

Z. B.

Z. B. (4 Ruthen 5 Fus 6 Zoll Duodecimalmaas) . 8.

```
    4  Ruthen
   12
   ——
   48 ⎫
    5 ⎬ Fus
   ——  ⎪
   53 ⎭
   12
  ———
  106
   53
  ———
  636 ⎫
    6 ⎬ Zoll
  ——— ⎪
  642 ⎭
    8  Multiplikator
  ———
 5136

12) 5136 | 12) 428 | 35 Ruthen
    48         36
    ——         ——
     33         68
     24         60
     ——         ——
      96         8 Fus
      96
      ——
       0
```

Das Produkt = 35 Ruthen 8 Fus.

§. 81. Eine unter mehrern Namen ausgedrükte genannte Zahl, mit einer ungenannten zu dividiren.

Auflösung.

Man dividire von dem grösten Namen, bis zum kleinsten. Die Reste bringe man vermittelst der Reduktionszahl auf den kleinern Namen, und addire sie vor der Division zu der Zahl mit dem nächst kleinern Namen.

Beispiel.

6) 49 Centner 15 Pfund 24 Loth

```
6) 49 Centner      15 Pfund             24 Loth
   48 | 8 Cent.   110                  160
   --              ---                  ---
    1         6) 125 | 20 Pfund    6) 184 | 30 4/6 = 30 2/3 Loth
  110             12                   18
  ---             --                   --
  110              5                    4
                  32
                  --
                 160
```

Also ist der Quotient 8 Centner 20 Pfund $30\frac{2}{3}$ Loth.

Oder:

Man reducire das Dividendum auf den kleinsten Namen §. 78., dividire alsdenn die erhaltene Zahl mit dem Divisor und bringe den Quotienten vermittelst der Reduktionszahl auf den grösten Namen. §. 77.

Z. B. (12 Ruthen, 4 Fus, 8 Zoll, Duodecimalmaas) : 8

```
  12  Ruthen
  12
  --
  24
 12
 ---
 144 \
   4  } Fus
 ---  |
 148 /
  12
 ---
 296
148
----
1776 \
   8  } Zoll
----  |
1784 /
```

8) 1784

8) 1784 | 12) 223 | 12) 18 | 1 Ruthe

```
16        12       12
--        ---      --
 18       103       6 Fus
 16        96
 --        --
  24        7 Zoll
  24
  --
  0
```

Der Quotient = 1 Ruthe 6 Fus 7 Zoll.

Die Gründe des Verfahrens bei den 4 Rechnungsarten in genannten Zahlen lassen sich aus den Rechnungsarten mit ungenannten Zahlen leicht herleiten.

Zusaz.

Soll man eine genannte Zahl mit einem Bruche multipliciren, so muß man, um den Quotient zu erhalten, mit dem Zähler des Bruchs, wie §. 80. multipliciren. Das erhaltene Produkt aber mit dem Nenner des Bruchs nach §. 81. dividiren. Eben so dividirt man eine genannte Zahl mit einem Bruche, wenn man die genannte Zahl mit dem Nenner des Bruchs multipliciret, und was heraus kommt, mit dem Zähler dividirt. Man vergleiche damit §. 69. Zus. 3. und §. 70. Zus. 3.

VI.

Von den Zahlenverhältnissen und Proportionen.

1. Von den Verhältnissen.

Erklärung.

§. 82.

Von der Grösse einer Sache kann man einen Begrif bekommen, wenn man sie mit einer andern bekannten

Grösse von eben der Art vergleicht. Dies geschieht oft, ohne daß man den wirklichen Werth der bekannten Grösse angiebt. Die Grösse einer Sache, insofern sie durch Vergleichung mit der Grösse einer andern erkannt werden kann, heißt das Verhältnis der ersten Grösse, gegen die zweite; die Grössen können übrigens Linien, Flächen, Körper, oder Maasse, Gewichte ꝛc. sein. Da eine jede Grösse durch Zahlzeichen ausgedrükt, folglich als eine Zahl betrachtet werden kann, so können auch die Grössen der Zahlen von einerlei Art durch Verhältnisse mit einander verglichen werden.

Bei den Zahlenverhältnissen kommen folgende Untersuchungen vor. Man sieht entweder auf die Differenz der beiden Zahlen, oder auf ihren Quotient, indem man im ersten Falle untersucht, wieviel die eine an Einheiten die andere übertrift; im zweiten Falle aber, wie vielmal die eine in der andern enthalten ist oder dieselbe enthält. Die Differenz findet man durch die Subtraktion, den Quotient aber durch die Division. Bedient man sich bei der Vergleichung zweier Zahlen der Subtraktion; so heißt das daher entstehende Verhältnis ein arithmetisches; im entgegengesezten Falle aber, nämlich vermittelst der Division ein geometrisches Verhältnis. Die Differenz und der Quotient bei dieser Vergleichung nennt man gemeinschaftlich den Verhältnisnamen. Den Quotient, welcher die Grösse des geometrischen Verhältnisses angiebt, nennt man insbesondere den Exponent seines Verhältnisses, der eine ganze Zahl, aber auch ein Bruch sein kann, je nachdem die eine Zahl in der andern ein oder mehrmal ganz,

oder

oder nur ein Theil davon in der andern ein oder mehrmal enthalten ist. Ist von Verhältnissen überhaupt die Rede, ohne daß der Name arithmetisches oder geometrisches Verhältnis ausdrüklich zugesezt wird; so versteht man darunter allemal das geometrische Verhältnis.

1. Zusaz.

Die beiden Zahlen, welche zu einem Verhältnis erfordert werden, heissen die Glieder des Verhältnisses. Dieienige, die man zuerst im Verhältnisse sezt, nennt man das Vorderglied, oder das vorhergehende; die zweite hingegen das Hinterglied, oder das nachfolgende. Diese Benennungen gelten so wohl bei den arithmetischen, als auch bei den geometrischen Verhältnissen. Fängt man das Verhältnis mit der kleinern Zahl an, und endigt mit der grössern, so heist es ein zunehmendes, im entgegengesezten Falle aber ein abnehmendes Verhältnis. Gebrauch und Anwendung der Verhältnisse lernt man durch die Beschaffenheit der Aufgaben.

2. Zusaz.

Man bezeichnet die Verhältnisse auf folgende Art: *)

A. Arithmetische Verhältnisse,

1. zunehmende: 4 — 7; 5 — 10.
2. abnehmende: 7 — 4; 10 — 5.

D. i. im ersten Falle. 4 ist um 3 kleiner als 7, und 5 ist um 5 kleiner als 10, da denn 3 die Differenz des ersten, und 5 die Differenz des zweiten Verhältnisses ist.

*) Auch bezeichnen einige Mathematiker die arithmetischen Verhältnisse auf diese Art: z. B 7, 4; oder 7 . 4. Geometrische Verhältnisse werden oft mit einem Punkte, nämlich 4 . 7 oder 7 . 4 bezeichnet.

Im zweiten Falle. 7 ist um 3 grösser als 4, und 10 ist um 5 grösser als 5. Die Differenzen sind wie im ersten Falle 3 und 5.

B. Geometrische Verhältnisse,

1. zunehmende: 4 : 12; 5 : 25.
2. abnehmende: 12 : 4; 25 : 5.

D. i. im ersten Falle. 4 ist 3mal kleiner als 12, oder ist in 12, 3mal enthalten, so wie 5 in 25, 5mal.

Im zweiten Falle. 12 ist 3mal grösser als 4, und 25 ist 5mal grösser als 5.

Die Zahlen 3 und 5 sind hier in beiden Fällen die Exponenten der Verhältnisse.

2. Von den Proportionen.

Erklärung.

§. 83. Das Verhältnis von zwei Paar Zahlen kann gleich oder ungleich sein. Im ersten Falle stehen die vier Zahlen in Proportion, folglich heißt die Gleichheit zweier Verhältnisse überhaupt eine Proportion. Die Gleichheit der Verhältnisse selbst beruht auf der Gleichheit des Verhältnisnamens. Die Proportion ist eine arithmetische, wenn beide Verhältnisse arithmetische; hingegen eine geometrische Proportion, wenn beide Verhältnisse geometrische Verhältnisse sind.

1. Zusaz.

Von den 4 Zahlen, die eine Proportion ausmachen, heissen die erste und vierte die äussern, die zweite und dritte hingegen die mittlern Glieder. Unter gleichnamigen Gliedern versteht man entweder die vorhergehenden oder die nachfolgenden Glie-

der. Sind die Verhältnisse zunehmende, so heist auch die Proportion eine zunehmende; sind hingegen die Verhältnisse abnehmende, so ist auch die Proportion eine abnehmende Proportion. Uebrigens gilt auch hier das, was bei den Verhältnissen ist bemerkt worden (§. 82. Zusaz 1. zu Ende).

2. Zusaz.

Die Proportionen werden auf folgende Art bezeichnet:

A. Arithmetische Proportionen.

1. zunehmende: 4 — 7 = 5 — 8.
2. abnehmende: 7 — 4 = 8 — 5.

D. i. im ersten Falle. Um so viel 4 kleiner ist als 7, um so viel ist auch 5 kleiner als 8, oder kürzer: wie sich 4 zu 7 verhält, so verhält sich 5 zu 8, und im zweiten Falle umgekehrt, wie 7 zu 4, so 8 zu 5.

B. Geometrische Proportionen,

1. zunehmende: 4 : 12 = 6 : 18.
2. abnehmende: 12 : 4 = 18 : 6.

D. i. im ersten Falle. So vielmal 4 in 12 enthalten ist, so vielmal ist auch 6 in 18 enthalten. Kürzer: wie sich 4 zu 12 verhält, so verhält sich 6 zu 18.

Im zweiten Falle: wie 12 zu 4, so 18 zu 6.

Oder allgemeiner: So vielmal das erste Glied im zweiten enthalten ist, so vielmal ist auch das dritte im vierten enthalten, und umgekehrt. Oder abgekürzt: wie das erste Glied zum zweiten, so das dritte zum vierten.

3. Zusaz.

In Ansehung der Form werden die Proportionen noch auf folgende Art eingetheilt:

1. In unstäte Proportionen, wenn die mittlern Glieder von verschiedener Grösse sind, als:

a. unståte arithmetische Proportion:
$4 - 7 = 6 - 9$

b. unståte geometrische Proportion:
$4 : 12 = 6 : 18.$

2. In ståte Proportionen, wenn die mittlern Glieder einerlei Grösse haben, als:

a. ståte arithmetische Proportion:
$4 - 8 = 8 - 12.$

b. ståte geometrische Proportion:
$3 : 12 = 12 : 48$ *).

4. Zusaz.

Daher kann man die ståten Proportionen durch drei Zahlen angeben, und sie durch ein Komma unterscheiden, weil die mittlern Glieder allemal aus ein und eben derselben Zahl bestehen.

1. Arithmetische Proportion 4, 7, 10, d. i. $4 - 7 = 7 - 10.$
2. Geometrische Proportion 4, 12, 36, d. i. $4 : 12 = 12 : 36.$

5. Zusaz.

Aus dem Begriffe der Proportionen folgt, daß wenn man bei der arithmetischen Proportion die vorhergehenden Glieder und die Differenz weis, die nachfolgenden durch die Addition der Differenz zu den vorhergehenden finden

*) Einige Mathematiker bezeichnen die Proportionen auf folgende Art:

1. arithmetische: ÷ Ferner mit : oder ˙.˙ z. B. anstatt 4 — 8 = 6 — 10, 4 . 8 ÷ 6 : 10, und anstatt 4 — 8 = 8 — 12, ÷ 4, 8, 12.
2. geometrische: ∺ Anstatt 4 : 12 = 5 : 15, 4 : 12 ∺ 5 : 15, und anstatt 4 : 12 = 12 : 36, ∺ 4, 12, 36.

Bei Engländern und Franzosen ist diese Bezeichnungsart üblich: z. B. 2 . 6 :: 5 . 15, oder 2 . 6 ÷|÷ 5 . 15.

finden könne. Z. B. statt $4 - 7 = 5 - 8$ schreibt man $4 - 3 + 4 = 5 - 3 + 5$; und statt $4 - 7 = 7 - 10$ sezt man $4 - 3 + 4 = 3 + 4 - 3 + 3 + 4$: wenn man bei der geometrischen Proportion aber die vorhergehenden Glieder und den Exponent weis, so kann man die nachfolgenden durch die Multiplikation des Exponenten in die vorhergehenden finden. Z. B. statt der Proportion $4 : 12 = 6 : 18$ schreibt man $4 : 3 . 4 = 6 : 3 . 6$; und statt $4 : 12 = 12 : 36$ sezt man $4 : 3 . 4 = 3 . 4 : 3 . 3 . 4$.

6. Zusaz.

Hieraus sieht man, daß bei ieder arithmetischen Proportion die Summe der mittlern Glieder so groß ist als die Summe der äussern; bei ieder geometrischen Proportion hingegen, das Produkt der mittlern so groß als das Produkt der äussern Glieder.

Aufgabe.

§. 84. Zu drei gegebenen Zahlen die vierte arithmetische, oder auch die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung und Beweis.

1. Im ersten Fall addirt man die zweite zu der dritten, und subtrahirt von der Summe die erste Zahl. Denn wenn $4 - 7 = 5 -$ vierten Zahl gegeben ist, so drükt man diese Zahlen nach §. 83. Zusaz 5. auf diese Art aus: $4 - 3 + 4 = 5 -$ vierten Zahl, d. i. die vierte muß $3 + 5$ sein. Nun ist $3 + 4 + 5 - 4 =$ der Summe der zweiten und dritten Zahl — der ersten $= 3 + 5 = 8 =$ der vierten Zahl.
2. Im zweiten Falle multiplicirt man die zweite Zahl mit der dritten, und dividirt das Produkt mit der ersten Zahl. Denn wenn $4 : 12 = 6 :$ vierten

Zahl

Zahl gegeben ist, so drükt man diese Zahlen nach §. 83. Zusaz 5. auf folgende Art aus: 4 : 3 . 4 = 6 : vierten Proportionalzahl, d. i. die vierte muß 3 . 6 sein. Nun ist $\frac{3 \cdot 4 \cdot 6}{4}$ = dem Produkte der zweiten und dritten Zahl durch die erste dividirt = 3 . 6 = 18 = der vierten Proportionalzahl.

1. Zusaz.

Da nach dem Begriffe der Multiplikation der eine Faktor im Produkte so oft enthalten ist, als die Einheit im andern, so kann man aus einem Produkte eine Proportion machen, wenn man dasselbe als das vierte Glied zu der Einheit und zu den beiden Faktoren ansieht, welches auch bei Brüchen richtig ist.

Z. B. $4 \cdot 5 = 20$, also $1 : 4 = 5 : 20$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ — $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : \frac{6}{12}$

oder $\frac{2}{3} : 1 = \frac{6}{12} : \frac{3}{4}$

Eben so ist nach dem Begriffe der Division der Divisor im Dividendo so oft enthalten, als die Einheit im Quotienten; folglich kann man aus iedem Quotienten eine Proportion machen, wenn man denselben als das vierte Glied zum Divisor, der Einheit und dem Dividendo ansieht. Da aber ieder Bruch als ein Quotient angesehen werden kann, so gilt der Saz auch für die Brüche.

Z. B. $36 : 9 = 4$, also $1 : 4 = 9 : 36$

oder $4 : 1 = 36 : 9$

$\frac{2}{3} : \frac{7}{8} = \frac{16}{21}$, also $1 : \frac{16}{21} = \frac{7}{8} : \frac{2}{3}$

oder $\frac{16}{21} : 1 = \frac{2}{3} : \frac{7}{8}$.

2. Zusaz.

Da die Exponenten der Verhältnisse einer Proportion eigentlich Quotienten sind nach §. 82. und Quotienten als Brüche angesehen oder das Dividendum für den Zähler und der Divisor für den Nenner gesezt werden kann: so erhält man gleiche Brüche, wenn man die gleichnamigen

namigen Glieder einer Proportion zu Zählern und Nennern macht. Z. B. $4 : 12 = 8 : 24$ also $\frac{4}{12} = \frac{8}{24}$ und umgekehrt $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$ folglich $4 : 2 = 12 : 6$. Also kann man einen Bruch in einen ihm gleichen Bruch von einem beliebigen oder gegebenen Nenner verwandeln, wenn man den neuen Zähler als das vierte Glied zum gegebenen Nenner ansieht, welches gefunden wird, wenn man den neuen Nenner mit dem alten Zähler multiplicirt, und das Produkt mit dem alten Nenner dividirt. Z. B. $\frac{3}{4}$ soll in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 16 ist. $4 : 3 = 16$: neuen Zähler $= \frac{3 \cdot 16}{4} = \frac{48}{4} =$ also ist $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$. Eben so in genannten Zahlen. Man soll $\frac{2}{3}$ Thaler in Gr. verwandeln. Der gegebene Nenner ist 24, und es ist $3 : 2 = 24$: neuen Zähler $= \frac{2 \cdot 24}{3} = \frac{48}{3} = 16$; also $\frac{2}{3}$ Thaler $= \frac{16}{24}$ Thlr. $=$ 16 Gr.

Anmerkung.

Da auf den Lehren von den Proportionen die wichtigsten Entdekungen in der Mathematik beruhen und ihr anderweitiger Nuzen sehr ausgebreitet ist: so wird die Fortsezung in der allgemeinen Arithmetik, nebst einigen andern Lehren folgen, die vermittelst der gemeinen Arithmetik abzuhandeln zu viel Raum erfordern.

Zwei=

Zweiter Abschnitt.

Die allgemeine Arithmetik.

Begrif und Eintheilung der allgemeinen Arithmetik.

§. 85.

Eine jede Grösse kann als eine Zahl gedacht, folglich auch wie eine Zahl vermehrt oder vermindert werden. Beispiele davon geben die Verhältnisse. Die Grössen werden aber durch Zahlen verschieden ausgedrükt, je nachdem die Einheit anders genommen wird. So ist eine Linie 10 oder 12, nachdem der zehnte oder zwölfte Theil die Einheit ist. Wird nun die Einheit nicht bestimmt, so läßt sich jede Grösse als eine Zahl gedenken, nur daß sie durch ein allgemeineres Zeichen als die Zahlzeichen sind, ausgedrükt werden muß. Die Wissenschaft also, welche lehrt, aus bekannten oder gegebenen Grössen andere unbekannte finden, wird die allgemeine Arithmetik genannt. Da nun unter diesen Grössen auch Zahlen verstanden werden können: so schließt die allgemeine Arithmetik die gemeine in sich. Den Theil der allgemeinen Arithmetik, welcher die 4 Rechnungsarten mit allgemeinen Zeichen der Grössen und die Lehre von den Potenzen ꝛc. im Allgemeinen enthält, nennt man insbesondre die Buchstabenrechnung.

I.

I.

Die Buchstabenrechnung.

1. Bezeichnung der Grössen.

Willkührliche Säze.

§. 86.

Die Zeichen der unbestimmten Grössen der allgemeinen Arithmetik sind die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets, und zwar die erstern a, b, c, d, e, f, u. s. w. für bekannte; die leztern hingegen, als x, y, z, für unbekannte Grössen. *) So ist auch $a : b = c : x$ eine allgemeine Form für eine iede geometrische Proportion, weil a, b, c, nicht nur Zahlen, sondern auch andere Grössen, als Linien ꝛc. bedeuten können, und x ist eine noch unbekannte Grösse, welche aber aus den drei bekannten nach §. 84. bestimmt werden kann.

Zusaz.

Gleichartige Grössen in einer und eben derselben Verbindung werden mit einerlei; ungleichartige hingegen mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet.

§. 87. Produkte können ohne das Multiplikationszeichen und Quotienten mit den Zeichen der Brüche, aber

*) Vieta von Fontenai bediente sich zuerst der Buchstaben, und zwar der lateinischen Uncialen zu der Bezeichnung der bekannten und unbekannten Grössen, nachdem man vorher nur einige andere allgemeine Zeichen für unbekannte Grössen angenommen hatte. Nach ihm führte ein Engländer Harriot, die kleinen Buchstaben, statt der Uncialen, ein.

aber auch beide mit ihren gewöhnlichen Zeichen ausgedrükt werden.

So schreibt man a . b oder das Produkt zweier Grössen ohne Zeichen ab, d. i. a multiplicirt mit b. Den Quotient a : b ebenfalls $\frac{a}{b}$, d. i. a dividirt mit oder durch b. Eben so ist auch $\frac{a}{b}$ ein Bruch.

Soll eine Grösse einzeln oder ein Produkt mehrmal genommen werden, so sezt man die Zahl voran, die angiebt wie vielmal die Grösse oder das Produkt genommen werden soll, und nennt diese Zahl den Coefficient. Z. B. $a + a + a = 3a$; $ab + ab + ab + ab = 4ab$. und $a : 4 = \frac{a}{4}$, welches auch einen Bruch anzeigt. Jede einzelne Grösse hat also den Coefficient 1, welcher aber in den meisten Fällen wegbleibt. Z. B. $1a = a$. Daher ist auch $a = 1 . a = \frac{a}{1}$, und $\frac{a}{a} = 1$. *)

Zusaz.

Produkte, welche aus mehrern Faktoren bestehen, kann man ohne Multiplikationszeichen neben einander schreiben, auch ist es nicht nothwendig, Rüksicht auf die Ordnung der Faktoren zu nehmen.

So ist $a . b . c . d . e = abcde = adcbe$ etc. Daher auch $4a . 5b . 2c = 4 . 5 . 2 . a . b . c = 40 . abc = 40abc$.

§. 88. Brüche mit Buchstaben bezeichnet, können nach den gemeinen Regeln multiplicirt und dividirt, auf-

*) Diese Abkürzungen hat Harriot meistens eingeführt.

aufgehoben und unter einerlei Benennung gebracht werden.

Es ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Eben so sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unter einerlei Benennung gebracht $= \frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$. Auch $\frac{24 \cdot ab}{6 \cdot b} = 4a$.

§. 89. Die Verbindung der Grössen durch das Additions- oder Subtraktionszeichen, zeigt ihre Summe oder Differenz an.

So ist $a + b$ eine Summe, und $a - b$ eine Differenz. Also $a + a = 2a$, und $3a + 6a = 9a$; hingegen $8a - 5a = 3a$. Auch kann man die Summe und Differenz der Grössen durch übereinandergesezte Zeichen $\mp$ oder $\pm$ zugleich anzeigen. Z. B. $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \mp \frac{bc}{bd} = \frac{ad \mp bc}{bd}$ welches mit den Bruchregeln der gemeinen Arithmetik völlig übereinstimmt.

§. 90. Wenn Grössen aus mehrern, durch das Additions- oder Subtraktionszeichen verbundenen Theilen bestehen, so heissen sie *zusammengesezte*, im Gegentheil aber *einfache Grössen*. Die Theile der zusammengesezten Grössen, werden auch wohl *Glieder* genannt. Nach der Anzahl der Glieder nennt man die zusammengesezten Grössen selbst *zweitheilig*, *drei-*

theilig, vieltheilig. So ist a eine einfache $a + b - c + d$ aber eine vielfache oder vieltheilige Grösse.

§. 91. Sollen Summen oder Differenzen mit einander multiplicirt werden: so schließt man sie in Parenthesen. So heißt der Ausdruk $(a + b) . (a - b)$ das Produkt der Differenz beider Grössen in ihre Summe; und $(a + b) : (a - b)$, oder $\frac{a + b}{a - b}$ der Quotient der Differenz beider Grössen in ihre Summe. *)

Also ist auch $4a + 6a = (4 + 6) a = 10a$, oder allgemein $px + qx = (p + q) x$; und $\frac{px + qx}{p + q} = \frac{(p + q) x}{p + q} = x$.

2. Von dem Begriffe der entgegengesezten Grössen.

Erklärung.

§. 92. Grössen werden entgegengesezt genannt, wenn sie einander ganz oder doch zum Theil aufheben, so wie vorwärts, und rükwärts zurükgelegter Weg. Das, was man von zweien entgegengesezten Grössen erhält, nachdem die eine so viel ist vermindert worden, als der andern ihre Grösse angiebt, könnte man

*) Anstatt der Parenthesen bedienen sich verschiedene Mathematiker eines Strichs, welcher über die Summen und Differenzen gesezt wird. Z. B. $\overline{a + b} . \overline{a - b}$, anstatt $(a + b) . (a - b)$; und $\overline{a + b} : \overline{a - b}$, anstatt $(a + b) : (a - b)$.

man überhaupt das Resultat nennen: der Abkürzung wegen aber nennt man es die Summe der entgegengesezten Grössen, wenn gleich diese Summe durch die Subtraktion gefunden werden muß. Um die beiden entgegengesezten Grössen von einander zu unterscheiden, bezeichnet man die eine mit dem Additionszeichen (+) und nennt sie positiv, und die andere mit dem Subtraktionszeichen (—) und nennt sie negativ. Eigentlich sind beide Grössen für sich positive Grössen, nur wegen der Beziehung auf einen festgesezten Fall werden sie durch positiv und negativ von einander unterschieden. So kann vorwärts zurükgelegter Weg mit + bezeichnet und als positiv: rükwärts zurükgelegter Weg hingegen mit — bezeichnet, und als negativ angesehen werden. Bei einer einzelnen Grösse, oder bei der erstern unter mehrern kann, wenn sie positiv ist, das Zeichen weggelassen werden *).

J 2 Will-

*) Gewöhnlich erläutert man den Begrif von den entgegengesezten Grössen durch Beispiele, die von den gemeinen Begriffen Vermögen und Schuld hergenommen sind. Vermögen wird alsdenn mit + und Schuld mit — bezeichnet; oder Vermögen nennt man eine positive, und Schuld eine negative Grösse. So ist z. B. + 60 Thlr. Vermögen, eine positive und — 60 Thlr. Schuld, eine negative Grösse. Wer 60 Thlr. Vermögen und 60 Thlr. Schulden hat, hat eigentlich nichts, und wer 60 Thlr. Vermögen und 80 Thlr. Schulden hat, hat weniger als nichts. Wer hingegen 60 Thlr. Vermögen und 20 Thlr. Schulden hat, besizt nur 40 Thlr Vermögen, oder + 60 Thlr. — 20 Thlr. = + 40 Thlr. Auch — 60 Thlr. Vermögen und + 20 Thlr. Schulden betragen ebenfalls — 40 Thlr. Vermögen. Hieraus sieht man, daß beiderlei Grössen, positive und negative, wirkliche Grössen sind, und nur der Beziehung wegen einander entgegengesezt sind; auch sieht man ferner, daß es nicht darauf ankommt, welche von den entgegengesezten Grössen mit + oder mit

Willkührlicher Saz.

§. 93. Nimmt man die Einheit positiv an, so entstehen alle positiven Zahlen aus dem Vielfachen der positiven Einheit; alle negativen Zahlen aber aus dem Vielfachen derienigen Einheit, die der positiven entgegengesezt ist. Wird hingegen die Einheit negativ angenommen, so entstehen alle negativen Zahlen aus dem Vielfachen der negativen Einheit; alle positiven Zahlen aber aus dem Viel-

mit — bezeichnet wird. Indes leitet die Vorstellungsart der entgegengesezten Grössen durch Vermögen und Schuld auf zu eingeschränkte Begriffe. Der Natur des Begrifs angemessener kann man sich entgegengesezt am schiklichsten an Linien erläutern, so wie der Begrif eigentlich in der Geometrie gebraucht wird, und wovon im Folgenden mehreres vorkommen wird. Man muß nur bei negativen Grössen nicht immer an den Begrif der gemeinen Subtraktion, und bei positiven an den Begrif der gemeinen Addition denken. Einige wollen daher lieber die entgegengesezten Grössen anstatt positiv, obiektiv, und anstatt negativ, subtraktiv nennen. In dem gegenwärtigen Sinne soll + und — nichts als die Beziehung der Grössen auf einander anzeigen: so wie vorwärts und rükwärts zurükgelegter Weg, Steigen und Fallen des Barometers ꝛc. Man geht z. B. von einem Orte 100 Meilen vorwärts oder gegen West, und kommt 40 Meilen nach eben dem Orte, oder von West nach Ost zurük; wird nun gefragt, wie weit man von dem Orte, von welchem man ausgegangen, wirklich entfernt sei: so ist die Antwort 60 Meilen. Denn der sämmtliche zurükgelegte Weg ist zwar 100 + 40, also 140 Meilen, aber die Beantwortung der Frage bezieht sich auf die gegenwärtige Entfernung von dem Orte des Ausganges, daher vermindern die 40 Meilen rükwärts, die 100 Meilen vorwärts, folglich bleibt die Entfernung + 100 — 40 = + 60 Meilen. Ueberhaupt muß man sich gewöhnen, die Begriffe einer Lehre in einer Wissenschaft, mit den Begriffen einer andern Lehre in eben derselben Wissenschaft, nicht zu verwechseln, wenn sie auch einerlei Bezeichnung haben. Mehreres zur Erläuterung findet man in Karstens Lehrbegrif der gesammten Mathematik 2. Theil im 17. u. f. §§. der allgemeinen Arithmetik.

Vielfachen derienigen Einheit, die der negativen entgegengesezt ist. Nun sind positiv und negativ einander entgegengesezt (§. 92.), folglich ist es einerlei, ob die Einheit positiv oder negativ gewählt wird: also ist man dahin übereingekommen, die Einheit positiv anzunehmen.

Zusaz.

Grössen mit einerlei Zeichen vermehren daher einander, aber Grössen mit verschiedenen Zeichen vermindern einander entweder ganz, wenn sie gleich sind, oder nur zum Theil, wenn sie ungleich sind. So ist z. B. $+ 5a$ und $+ 4a = + 9a$, auch $- 6b$ und $- 4b = - 10b$; hingegen $+ a$ und $- a = 0$. Aber $+ 8a$ und $- 3a = + 5a$, und $- 8a$ und $+ 3a = - 5a$.

3. Allgemeine Addition.

Erklärung.

§. 94. Grössen addiren heißt, sie zu einander sezen und den zusammengesezten Ausdruk möglichst abkürzen.

Aufgaben.

§. 95. Einfache Grössen mit und ohne Zahlen zu addiren.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn die Grössen von einerlei Art sind und einerlei Zeichen haben. Man suche ihre Summe und gebe denselben das gemeinschaftliche Zeichen. Z. B. $+ 6a$ zu $+ 4a = + 6a + 4a = + 10$ und $- 7a$ zu $- 6a = - 7a - 6a = - 13a$. Aber $+ a$ zu $+ a = + 2a$, auch $- b$ zu $- b = - 2b$.

Zweiter Fall. Wenn die Grössen von einerlei Art sind, aber verschiedene Zeichen haben. Man suche ihre Differenz und gebe derselben das Zeichen der grössern Grösse; so hat man die allgemeine Summe. Z. B. — 6a zu + 8a = — 6a + 8a = + 2a, und + 8a zu — 6a = 8a — 6a = + 2a. Oder — a zu + a = + a — a = o auch + a zu — a = a — a = o.

Dritter Fall. Wenn die Grössen von verschiedener Art sind, und einerlei oder verschiedene Zeichen haben. Man seze die summirenden Grössen aneinander und allenfalls das Addendum in eine Parenthese, unterscheide aber das Additionszeichen von dem Zeichen einer positiven Grösse.

Z. B. + 6b zu + 5a = 6b + 5a. Eben so zu + 6b soll — 3a addirt werden, also erhält man 6b — 3a auch + a — d = a — d oder + 6b + 5a = 6b + (+ 5a), und zu 6b — 3a = 6b + (— 3a); so auch — a + d = — a + (+ d). Demnach ist auch a + (b — c) = a + b — c. Der Beweis ergiebt sich aus §. 93. und 94.

§. 96. Zusammengesezte Grössen, die aus positiven und negativen Theilen bestehen, zu addiren.

Auflösung.

Man seze die gleichartigen Theille unter einander und unter jede Columne die Summe mit dem dazu gehörigen Zeichen, nach §. 95. Kommen gleichartige Theile vor, so seze man sie mit ihren Zeichen an einander in die Summe und verfahre übrigens wie vorhin.

Bei-

Beispiele.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 5a + & 9b - & 2c + & 13d - & 6x - & 7y \\ & 3a - & 2b + & 6c - & 5d - & 5x + & 5y \\ & 4a + & 6b - & 5c - & 8d - & 7x - & 3y \\ & 4a - & 2b - & 3c + & 7d - & 2x + & 6y \\ \hline \text{Summe} & 16a + & 11b - & 4c + & 7d - & 20x + & 1y \end{array}$$

Brüche.

$$\begin{array}{l} \frac{ad}{e} - 4\frac{f}{g} + 5cd + \frac{m}{n} \\ gh + 2\frac{l}{gs} + 3\frac{cd}{q} - \frac{g}{n} + t \\ \hline \frac{ad + gh}{e} - \frac{4fs + 2l}{gs} + \frac{5cdq + 3cd}{q} + \frac{mg}{n} + t \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ & a - b \\ \hline \text{Summe} & 2a + b - b = 2a \end{array}$$

In diesem Beispiele ist $a + b$ die Summe zweier Grössen, und $a - b$ ihre Differenz: ist nun $a > b$, so ist $2a$ die doppelte grössere Grösse, also folgt, wenn man die Differenz zweier Grössen zu ihrer Summe addirt, so findet man diese doppelte grössere Grösse. Da nun $a - b = \frac{1}{2}(a - b) . 2$, also $\frac{1}{2}(a - b)$ die halbe Differenz der beiden Grössen, $a + b = \frac{1}{2}(a + b) . 2$, also $\frac{1}{2}(a + b)$ die halbe Summe der beiden Grössen ist, so folgt auch, wenn man die halbe Differenz zweier Grössen zu ihrer halben Summe addirt, so findet man die grössere Grösse. Weil aber a und b auch Zahlen anzeigen können, so gilt der Saz auch für Zahlen.

4. Allgemeine Subtraktion.

Erklärung.

§. 97. Grössen subtrahiren heißt, sie von einander wegnehmen, welches geschieht, indem man das Entgegengesezte des Subtrahendums zu dem Minuendo addirt.

Soll man z. B. eine Grösse b von einer andern a subtrahiren, so kann man sich vorstellen, es sei a = a + b — b. Wird + b weggenommen, so bleibt a — b; wird — b weggenommen, so bleibt a + b. Folglich wird von a eine Grösse + b oder — b subtrahirt, wenn man zu a in jedem Falle das Entgegengesezte von b addirt.

Aufgaben.

§. 98. Einfache Grössen, mit und ohne Zahlen, zu subtrahiren.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn die Grössen von einerlei Art sind: so kürze man den zusammengesezten Ausdruk ab.

Z. B. + 3a von + 8a = 8a — 3a = 5a, und — 3a von + 8a = 8a + 3a = 11a.

Oder + a von + a = a — a = 0, und — a von + a = a + a = 2a. (§. 95.)

Zweiter Fall. Wenn die Grössen von verschiedener Art sind: so seze man blos das Entgegengesezte des Subtrahendi zu dem Minuendo.

Z. B. + 5b von + 8a = 8a — 5b; hingegen — 5b von + 8a = 8a + 5b. Oder + b von + a = a — b; und — b von + a = a + b. (§. 97.)

Um

Um Irrungen zu verhüten, seze man im lezten Falle das Subtrahendum in eine Parenthese, und unterscheide das Subtraktionszeichen von dem Zeichen einer negativen Grösse.

Also sind die vorigen Beispiele: $8a - (+5b) = 8a - 5b$, und $8a - (-5b) = 8a + 5b$; folglich $a - (+b) = a - b$, und $a - (-b) = a + b$. Demnach ist auch $a - (b + c) = a - b - c$, aber $a - (b - c) = a - b + c$.

Der Beweis ergiebt sich aus §. 94. und 97.

§. 99. Zusammengesezte Grössen, die aus positiven und negativen Theilen bestehen, zu subtrahiren.

Auflösung.

Man seze die gleichartigen Theile untereinander, und addire in ieder Columne die Grössen der untern Reihe mit ihren entgegengesezten Zeichen zu der obern Reihe (§. 96.) *).

Beispiele.

$$\begin{array}{l} 6a + 4b + 6c - 5d - 2e - 8f + 7g \\ 2a + 8b - 3c + 2d - 8e - 3f \quad 0 \quad + x \\ \hline 4a - 4b + 9c - 7d + 6e - 5f + 7g - x \end{array}$$

Brüche.

$$\begin{array}{l} \frac{4a}{b} - 6bb + 7xy + \frac{5c}{e} + h \\ \frac{2g}{lm} - 7bb + 4xy - \frac{6hl}{pq} - 4h \\ \hline \frac{4alm - 2gb}{blm} + bb + 3xy + \frac{5cpq + 6ehl}{epq} + 5h. \end{array}$$

*) Hieraus ist die praktische Regel entstanden: Man verwandle die Zeichen derienigen Grössen, die man subtrahiren soll, in die entgegen-

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline + 2b \end{array}$$

Ist wie in §. 96. $a + b$ die Summe zweier Grössen, und $a - b$ ihre Differenz, und $a > b$; so ist die Differenz der beiden zusammengesezten Grössen $2b$ die doppelte kleinere Grösse, also folgt ein ähnlicher Saz:

Wenn man die Differenz zweier Grössen von ihrer Summe subtrahiret, so findet man die doppelte kleinere Grösse. Da nun $a - b = \frac{1}{2}(a - b) . 2$, also $\frac{1}{2}(a - b)$ die halbe Differenz der beiden Grössen, $a + b = \frac{1}{2}(a + b) . 2$, also $\frac{1}{2}(a + b)$ die halbe Summe der beiden Grössen ist; so folgt auch, wenn man die halbe Differenz zweier Grössen von ihrer halben Summe subtrahirt, so findet man die kleinere Grösse. Daß dieser Saz auch für Zahlen gilt, erhellt aus dem Vorhergehenden.

5. Allgemeine Multiplikation.

Erklärung.

§. 100. Grössen multipliciren heißt, eine Grösse finden, welche aus dem einen Faktor eben auf die Art entsteht, als der andere Faktor aus der Einheit.

Lehrsaz.

§. 101. Das Produkt ist, wenn die Faktoren einerlei Zeichen haben, positiv, wenn sie aber verschiedene

gegengesezten, d. i. + in —, und — in +, und addire nach §. 95. und 96.

dene Zeichen haben, negativ. Demnach wäre z. B. $+6 . +4 = +24$, und $-6 . -4 = +24$; hingegen $+6 . -4 = -24$ und $-6 . +4 = -24$. Allgemein: wenn a das Multiplikandum und b den Multiplikator bezeichnet. $+a . +b = +ab$, und $-a . +b = -ab$. Hingegen $+a . -b = -ab$, und $-a . +b = -ab$.

B e w e i s.

Nach §. 93. wird in iedem Falle die Einheit positiv angenommen, und nach §. 84. Zusaz 1. kann man aus iedem Produkte eine Proportion machen; also

1) $+1 : +4 = +6 : +6 . +4$, oder $+1 : +b = +a : +a . +b$ und es wird erfordert, daß $+6 . +4 = +24$, und $+a . +b = +ab$.
2) $+1 : -4 = -6 : -6 . -4$, oder $+1 : -b = -a : -a . -b$, also muß $-6 . -4 = +24$, und $-a . -b = +ab$.
3) $+1 : -4 = +6 : +6 . -4$, oder $+1 : -b = +a : +a . -b$, folglich $+6 . -4 = -24$, und $+a . -b = -ab$.
4) $+1 : +4 = -6 : -6 . +4$, oder $+1 : +b = -a : -a . +b$, daher muß auch $-6 . +4 = -24$, und $-a . +b = -ab$. (§. 100. verglichen mit §. 93.)

A u f g a b e.

§. 102. Zusammengesezte Grössen, die aus positiven und negativen Theilen bestehen, zu multipliciren.

A u f l ö s u n g.

1. Man seze das Multiplikandum und den Multiplikator wie bei Zahlen untereinander, und multiplicire alle Theile des Multiplikandums mit iedem Theile des Multipli-

tiplikators, gebe einem ieden Produkte das gehörige Zeichen, und bringe, wenn der Multiplikator aus mehrern, als aus einem Theile besteht, die Partialprodukte nach §. 95. und 96. in eine Summe, diese ist das verlangte Produkt. Es sei z. B. $a + b$ das Multiplikandum, c der Multiplikator, so ist $(a + b)\,c = c\,(a + b) = ac + bc$.

Denn
$$\begin{array}{r} a + b \\ c \\ \hline ac + bc \end{array}$$

also auch $(a + b)(c + d) = (a + b)\,c + (a + b)\,d$.

Denn
$$\begin{array}{rr} & a + b \\ & c + d \\ \hline & ad + bd \\ ac + bc & \\ \hline ac + bc + ad + bd & = (a + b)\,c + (a + b)\,d. \end{array}$$

2. Sind die allgemeinen Grössen mit Coefficienten verbunden, so multiplicire man diese besonders und verfahre übrigens wie vorhin. Kommen gleichartige Produkte vor, so seze man dieselben unter einander, weil es auf die Ordnung der Faktoren nicht ankommt, damit man mit mehr Bequemlichkeit addiren kann.

Beispiele.

$$\begin{array}{rrr} 3ab & - 4cd & \\ 8ab & + 5cd & \\ \hline 24aabb & - 32abcd & \\ & + 15abcd & - 20ccdd \\ \hline 24aabb & - 17abcd & - 20ccdd \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rrr} & 3ab & - 4cd \\ & 8ab & + 5cd \\ \hline & + 15abcd & - 20ccdd \\ 24aabb & - 32abcd & \\ \hline 24aabb & - 17abcd & - 20ccdd \end{array}$$

Brüche.

Brüche.

$$\left(\frac{4a}{2b} - \frac{3bc}{4a} + \frac{6ac}{5ba} - \tfrac{3}{5}rd\right) \cdot \frac{3ab}{9d} = \frac{12aab}{18bd} - \frac{9ab}{18ad} + \frac{18aabc}{45bdd} - \frac{9abdr}{45d},$$

wenn die Brüche aufgehoben werden $= \frac{2aa}{8d} - \frac{1bbc}{2d} + \frac{2aac}{5dd} - \frac{1}{5}abr.$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2} + a - \frac{3}{4} \\
\frac{1}{3}b - \frac{1}{4} \\
\hline
-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}a + \frac{3}{16} \\
\frac{1}{6}b + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{4}b \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
\frac{1}{6}b + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}a + \frac{3}{16}
\end{array}$$

Zusaz.

Man sieht aus diesen Beispielen, daß in iedem Falle die Multiplikation mit und ohne Coefficienten wirklich verrichtet werden kann; indes giebt es doch Fälle, wo man nur nöthig hat, die Multiplikation durch das bekannte Zeichen anzuzeigen, und nicht wirklich zu multipliciren. Die Vortheile davon werden sich im Folgenden ergeben.

6. Allgemeine Division.

Erklärung.

§. 103. Grössen dividiren heißt, eine Grösse finden, welche aus dem Dividendo eben so entsteht, als die Einheit aus dem Divisor.

Lehrsaz.

§. 104. Jeder Quotient ist, wenn das Dividendum und der Divisor einerlei Zeichen haben, positiv, wenn sie aber verschiedene Zeichen haben, negativ.

Dem=

Demnach wäre z. B. $\frac{+24}{+6} = + 4$, und $\frac{-24}{-6} = - + 4$; hingegen $\frac{-24}{+6} = - 4$; und $\frac{+24}{-6} = - 4$. Allgemein, wenn a das Dividendum, und b den Divisor bezeichnet $\frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b}$, und $\frac{-a}{-b} = + \frac{a}{b}$; hingegen $\frac{+a}{-b} = - \frac{a}{b}$, und $\frac{-a}{+b} = - \frac{a}{b}$

Beweis.

Nach §. 93. wird die Einheit in iedem Falle positiv angenommen, nach §. 84. Zusaz 1. kann man aus iedem Quotienten eine Proportion machen; also

1. $+6 : +1 = +24 : \frac{+24}{+6}$, oder $+b : +1 = +a : \frac{+a}{+b}$, und es wird erfordert, daß $\frac{+24}{+6} = +4$, und $\frac{+a}{+b} = + \frac{a}{b}$.

2. $-6 : +1 = +24 : \frac{-24}{-6}$, oder $-b : +1 = -a : \frac{-a}{-b}$, also muß $\frac{-24}{-6} = -4$, und $\frac{-a}{-b} = - \frac{a}{b}$.

3. $-6 : +1 = +24 : \frac{+24}{-6}$, oder $-b : +1 = +a : \frac{+a}{-b}$, folglich $\frac{+24}{-6} = -4$, und $\frac{+a}{-b} = - \frac{a}{b}$.

4. +6

4. $+6 : +1 = -24 : \frac{-24}{+6}$, oder $+b : +1 = -a : \frac{-a}{+b}$, daher muß auch $\frac{-24}{+6} = -4$, und $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$. (§. 103. vergl. mit §. 93.)

Aufgaben.

§. 105. Einfache Grössen zu dividiren, wobei auf die Zeichen der entgegengesezten Grössen keine Rüksicht genommen wird.

Auflösung und Beweis.

Erster Fall. Wenn das Dividendum und der Divisor einzelne einfache Grössen sind. In diesem Falle zeigt man die Division blos, durch das gewöhnliche Divisionszeichen, an. Z. B. wenn a durch b soll dividirt werden: so ist $a : b = \frac{a}{b}$.

Zweiter Fall. Wenn das Dividendum ein Produkt aus einer einfachen, der Divisor aber eine einzelne einfache Grösse ist. Man streiche im Dividendo alle Grössen aus, welche dasselbe gemeinschaftlich mit dem Divisor hat. Z. B. soll ab durch a dividirt werden: so ist $ab : a = \frac{ab}{a} = b$, denn $b . a = ab$. Eben so $abc : c = \frac{abc}{c} = ab$, denn $ab . c = abc$. So auch $abcd : abcd = \frac{abcd}{abcd} = 1$. Denn $1 . abcd = abcd$ ꝛc.

Dritter Fall. Wenn das Dividendum und der Divisor Produkte aus einfachen Grössen sind. Kommen in beiden gleiche Grössen vor, so

so läßt man sie weg, und verfährt übrigens wie vorhin. Z. B. $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$, denn $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ab}{cb}$; auch $\frac{abcd}{abg} = \frac{cd}{g}$, denn $\frac{cd}{g} \cdot \frac{ab}{b} = \frac{abcd}{abg}$. Eben so ist $\frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$.

Vierter Fall. Wenn das Dividendum, oder der Divisor, oder beide zugleich mit Coefficienten verbunden sind. Man dividire die Coefficienten nach den gewöhnlichen Regeln der Division, und seze den erhaltenen Quotienten der allgemeinen Grösse voran. Z. B. $\frac{4ab}{2a} = 2b$, denn $2b \cdot 2a = 4ab$. Wird der Quotient ein Bruch, so hebt man denselben, wenn es angeht, nach den Regeln der gemeinen Arithmetik auf. Z. B. $\frac{2abc}{3ac} = \frac{2b}{3}$; $\frac{6abcd}{8ab} = \frac{3cd}{4}$.

§. 106. Zusammengesezte Grössen, die aus positiven und negativen Theilen bestehen, zu dividiren.

Auflösung.

Erster Fall. Wenn das Dividendum zusammengesezt, der Divisor aber einfach ist.

1. Man dividire nach einander alle Theile des Dividendi mit dem Divisor, nach den im §. 105. gegebenen Regeln, und gebe dem Quotienten das ihm gehörige Zeichen nach §. 104. Soll z. B. $15aa + 20ab - 10ac$ mit $5a$ dividiret werden, so ist der Quotient $= \frac{15aa}{5a} + \frac{20ab}{5a} - \frac{10ac}{5a} = 3a + 4b - 2c$.

Denn

$$\text{Denn } 5a)\ 15aa + 20ab - 10ac \mid 3a + 4b - 2c$$
$$\begin{array}{l} 15aa \\ \hline 0 + 20ab \\ \quad + 20ab \\ \hline \quad\quad 0 - 10ac \\ \quad\quad\quad - 10ac \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

2. Geht der Divisor in irgend einem Theile des Dividendi nicht ganz auf, so drükt man den Quotienten in der Form eines Bruches aus. Soll z. B. $abc - abb + acc$ mit bc dividirt werden, so ist der Quotient $= a - \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b}$.

$$\text{Denn } bc)\ abc - abb + acc \mid a - \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b}$$
$$\begin{array}{l} abc \\ \hline \quad - abb \\ \quad - abb \\ \hline \quad\quad 0 + acc \\ \quad\quad\quad + acc \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Zweiter Fall. Wenn sowohl das Dividendum als auch der Divisor zusammengesezte Grössen sind.

1. Man ordne das Dividendum nach den Theilen des Divisors und suche den ersten Theil des Quotienten nach den vorhin gegebenen Regeln, multiplicire den Quotienten mit allen Theilen des Divisors und subtrahire das Produkt vom Dividendo. Bleibt ein Rest, so nehme man solchen zu dem folgenden Theile des Dividendi und suche die übrigen Theile des Quotienten. Bliebe endlich zulezt ein Rest, so könnte man denselben als den Zähler eines Bruchs betrachten, wozu der Divisor als Nenner gehört, und diesen Bruch dem Quotienten beifügen.

Beispiele.

$$b - a)\ ab - ac \mid a$$
$$\underline{ab - ac}$$
$$0$$

$$2ab - 3c)\ 8aab - 12ac \mid 4a$$
$$\underline{8aab - 12ac}$$
$$0$$

$$b + c)\ bb + bc - ab - ac + a \mid b - a + \frac{a}{b+c}$$
$$\underline{bb + bc}$$
$$-ab - ac + a$$
$$\underline{-ab - ac}$$
$$\text{Rest } + a$$

$$(6a - 5b - 4c) \text{ Divisor}$$
$$30aa - 13ab - 38ac - 10bb + 7bc + 12cc \mid 5a + b - 3c$$
$$\underline{30aa - 25ab - 20ac}$$
$$+ 12ab - 18ac - 10bb + 7bc + 12cc$$
$$\underline{+ 12ab \quad - 10bb - 8bc}$$
$$18ac \quad + 15bc + 12cc$$
$$\underline{18ac \quad + 15bc + 12cc}$$
$$0$$

$$de - f)\ abde - dec + de - abf + cf - f \mid ab - c + 1$$
$$\underline{-abde \quad + abf}$$
$$-dec + de \quad + cf - f$$
$$\underline{+dec \quad - cf}$$
$$+de \quad - f$$
$$\underline{-de \quad + f}$$
$$0$$

Brüche.

$$\frac{a+b}{b-c} : \frac{c+d}{b-c} = \frac{a+b}{b-c} \cdot \frac{b-c}{c+d} = \frac{ab - ac + bb - bc}{bc + bd - cc - cd},$$

nachdem die Multiplikation der Zähler in Zähler und der Nenner in Nenner vorgenommen worden. Ferner

$$\tfrac{1}{3}b - \tfrac{1}{4})\ \tfrac{1}{6}b + \tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{4}b - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{3}{16} \mid \tfrac{1}{2} + a - \tfrac{3}{4}$$
$$\underline{-\tfrac{1}{6}b \quad + \tfrac{1}{8}}$$
$$+\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{4}b \quad - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{3}{16}$$
$$\underline{-\tfrac{1}{3}ab \quad + \tfrac{1}{4}a}$$
$$-\tfrac{1}{4}b \quad + \tfrac{3}{16}$$
$$\underline{+\tfrac{1}{4}b \quad - \tfrac{3}{16}}$$
$$0$$

m + 1)

$$\begin{array}{l} m+1)\ mm - 1 \mid m - 1 \\ \quad\quad mm + m \\ \hline \quad\quad - m - 1 \\ \quad\quad - m - 1 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Zusaz.

Ist der Divisor kein Faktor des Dividendi, so erhält der Quotient die Form eines Bruchs, d. i. die Division wird blos durch das Divisionszeichen angezeigt z. B. a dividirt mit $b + c$, so ist der Quotient $\frac{a}{b+c}$ oder c dividirt mit $a + b$, so ist der Quotient $\frac{c}{a+b}$.

Indes ist es doch möglich, wenn der Divisor aus mehrern Theilen besteht, daß man den Quotienten auf die im §. beschriebene Art suchen kann; man erhält alsdenn den Quotienten durch eine Reihe von Brüchen ohne Ende.

Beispiele.

$$b+c)\ a \mid \frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb} \ldots\ldots \text{ohne Ende}$$

$$\begin{array}{l} a + \frac{ac}{b} \\ \hline 0 - \frac{ac}{b} \\ \quad - \frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb} \\ \hline \quad\quad 0 + \frac{acc}{bb} \\ \quad\quad + \frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb} \\ \hline \quad\quad\quad 0 - \frac{accc}{bbb} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
a + b)\; c \;\Big|\; \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} \ldots\ldots \text{ ohne Ende} \\
\quad c + \frac{bc}{a} \\
\hline
\quad o - \frac{bc}{a} \\
\quad\quad - \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa} \\
\hline
\quad\quad\quad o + \frac{bbc}{aa} \\
\quad\quad\quad\quad + \frac{bbc}{aa} + \frac{bbbc}{aaa} \text{ u. s. w.}
\end{array}
$$

Auf ähnliche Art findet man $c : (a - b)$ oder $\frac{c}{a-b}$ $= \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} \ldots\ldots$ ohne Ende.

Setzt man $c = b = 1$, a aber $= 2$; so erhält man anstatt $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{2+1}$ oder $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots\ldots$ ohne Ende.

Anstatt $\frac{c}{a-b}$ aber $= \frac{1}{2-1}$ oder $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots\ldots$ ohne Ende.

Eben so verhält es sich mit den folgenden Brüchen.

$$
\begin{array}{l}
1 + x)\; 1 \;\big|\; 1 - x + xx \ldots\ldots \text{ ohne Ende.} \\
\quad 1 + x \\
\hline
\quad o - x \\
\quad - x - xx \\
\hline
\quad\quad o + xx \\
\quad\quad + xx + xxx \\
\hline
\quad\quad\quad o - xxx \text{ u. s. w.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1 - x\ )\ 1 \quad | 1 + x + xx + \ldots \text{ ohne Ende.} \\
\underline{1 - x} \\
0 + x \\
\underline{+ x - xx} \\
0 + xx \\
\underline{+ xx - xxx} \\
0 + xxx \text{ u. s. w. *)}
\end{array}
$$

7. Von den Potenzen und ihren Wurzeln.

Erklärung.

§. 107. Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren heist eine Potenz (Dignität), und derjenige Faktor, der ein oder mehrmal in sich selbst multiplicirt dies Produkt giebt, wird die Wurzel desselben Produkts, oder derselben Potenz genannt. So ist z. B. $64 = 8 \cdot 8$, und $512 = 8 \cdot 8 \cdot 8$ eine Potenz von 8. Und umgekehrt 8 die Wurzel der Zahl 64, so wie auch der Zahl 512. Allgemein aa und bbb sind Potenzen, a und b die Wurzeln von diesen Potenzen.

Zusaz.

Die Potenzen erhalten von der Anzahl der gleichen Faktoren, woraus sie bestehen, eigene Namen. So heist aa die zweite, aaa die dritte, aaaa die vierte Potenz. Ueberhaupt kann man die Anzahl der gleichen Faktoren den iedesmaligen Grad der Potenz nennen. So ist aa eine Potenz vom zweiten, aaa eine Potenz vom dritten, aaaa eine Potenz vom vierten Grade.

*) Hieraus sieht man, daß dies Verfahren alle Aehnlichkeit hat, mit dem, aus der gemeinen Arithmetik §. 75. um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, wobey ebenfalls die Reihe der Decimaltheile in manchen Fällen nie aufhört.

Die Potenz vom zweiten Grade nennt man insbesondere die Quadratzahl; die vom dritten Grade die Kubikzahl, und die Potenz vom vierten Grade die Biquadratzahl. So giebt z. B. 4 . 4, oder aa eine Quadratzahl; 4 . 4 . 4 oder aaa eine Kubikzahl; 4 . 4 . 4 . 4 oder aaaa eine Biquadratzahl. Daher heist auch die Wurzel der zweiten Potenz, die Quadratwurzel; die Wurzel der dritten Potenz, die Kubikwurzel; die Wurzel der vierten Potenz, die Biquadratwurzel ꝛc. *).

Willkührliche Säze.

§. 108. Man schreibt den Grad einer Potenz mit einem Zahlzeichen, statt der gleichen Faktoren, welche die Potenz ausmachen, oben rechter Hand an die Wurzel und nennt dies Zahlzeichen den Exponenten der Potenz. Ist die Wurzel eine zusammengesezte Grösse, so schließt man dieselbe in eine Parenthese und sezt den Exponenten ausserhalb derselben an die angezeigte Stelle. So schreibt man z. B. a^4 statt aaaa; a^3 statt aaa, und a^2 statt aa, oder 6^2 statt 6 . 6; 6^3 statt 6 . 6 . 6. Eben so $(a + b + c)^2$, statt $(a + b + c) . (a + b + c)$ oder $(a + b + c)(a + b + c)$. ꝛc.

§. 109. Um die Wurzeln nach ihren Graden zu unterscheiden, bedient man sich des Zeichens ($\sqrt{}$) welches in einer veränderten Form den Buchstaben r als den Anfangsbuchstaben des Worts radix (Wurzel) an-

*) Die Benennung Quadratzahl ist aus der ebenen Geometrie von der Figur: Quadrat, so wie die Benennung Kubikzahl aus der körperlichen Geometrie, von dem Körper: Würfel oder Kubus, entlehnt. Die Quadratwurzel ist

anzeigt, sezt in dies Zeichen ein Zahlzeichen, welches durch seine Einheiten den iedesmaligen Grad der Wurzel angiebt, und schreibt dasselbe vor die Grösse, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll. Von diesem Wurzelzeichen und dem darüberstehenden Zahlzeichen erhalten die Wurzeln ihre Namen, daher man auch das Zahlzeichen den Exponent der Wurzel nennt. So heist z. B. $\sqrt[2]{a^2}$ die Wurzel des zweiten, $\sqrt[3]{a^3}$ des dritten, $\sqrt[4]{a^4}$ des vierten und überhaupt $\sqrt[n]{a}$ die Wurzel des nten Grades von a. Eben so verhält es sich mit den zusammengesezten Grössen, wenn ihre Wurzeln angezeigt werden. So ist z. B. $\sqrt[2]{(a^2 + b)}$ die Wurzel des zweiten Grades von $a^2 + b$; $\sqrt[3]{(a + b^2 + c)}$ die Wurzel des dritten Grades von $a + b^2 + c$ und überhaupt $\sqrt[n]{(a^m + b^4 - c^2)}$ die Wurzel des nten Grades von $a^m + b^4 - c^2$. Daher zeigt $\sqrt[2]{}$ oder $\sqrt{}$ ohne Exponenten die Quadratwurzel, $\sqrt[3]{}$ die Kubikwurzel an (§. 107). Auch bei Zahlen findet diese Bezeichnung statt. So ist z. B. $\sqrt[2]{36}$ die Quadratwurzel von 36; $\sqrt[3]{216}$ die Kubikwurzel von 216. Weil ferner $\sqrt{16} = \sqrt{(4 \cdot 4)} = \sqrt{4^2}$; $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{(6 \cdot 6 \cdot 6)} = \sqrt[3]{6^3}$, so ist auch allgemein $\sqrt[n]{a^n} = a$ und $\sqrt[x]{a^x}$ ebenfalls $= a$.

Erklärung.

§. 110. Eine Grösse zu einem gewissen Grade erheben, oder sie potenziren heist, dieselbe so vielmal in sich selbst multipliciren, als der Expo-

ist der Quadratzahl das, was die Seite des Quadrats dem Quadrate, und die Kubikwurzel der Kubikzahl das, was die Seite des Kubus, dem Kubus ist.

nent der Potenz Einheiten enthält. So a zu dem zweiten Grade erhoben = aa = a^2; a zu dem dritten Grade erhoben = aaa = $a^2 . a = a^3$; zu dem vierten Grade erhoben = aaaa = $a^3 . a = a^4$, oder allgemein aaaaa ... = a^n. Die Zahl 6 zu der Quadratzahl erhoben, ist $6 . 6 = 6^2$: also auch $6 . 6 . 6 = 6^2 . 6 = 6^3$, d. i. die Zahl 6 ist zur Kubikzahl erhoben (§. 107). Umgekehrt: die Wurzel eines gewissen Grades aus einer gegebenen Grösse ziehen, oder extrahiren heist, eine Zahl finden, welche, so vielmal in sich selbst multiplicirt als der Exponent der Potenz Einheiten enthält, die gegebene Grösse wieder giebt. So ist z. B. die Wurzel des zweiten Grades aus $a^2 = a$, weil aa = a^2; die Wurzel des dritten Grades aus $a^3 = a$, weil aaa = a^3. Oder allgemein: die Wurzel des nten Grades aus $a^n = a$, weil aaaaa ... = a^n. Eben so ist die Quadratwurzel aus $6^2 = 6$, weil $6 . 6 = 6^2$; die Kubikwurzel aus $6^3 = 6$, weil $6^2 . 6 = 6^3$.

1. Zusatz.

Ist die gegebene Grösse ein Bruch, so ist die Quadrat- oder Kubikwurzel desselben ebenfalls ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Quadrat- oder Kubikzahl von dem Zähler und Nenner der Wurzel ist (§. 69.). So ist die Quadratzahl von $\frac{c}{a} = \frac{cc}{aa} = \frac{c^2}{a^2}$, von $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$, und von $2\frac{3}{4}$ oder $\frac{11}{4} = \frac{11 \cdot 11}{4 \cdot 4} = \frac{121}{16} = 7\frac{9}{16}$. Eben so die Kubikzahl von $\frac{c}{a} = \frac{ccc}{aaa} = \frac{c^3}{a^3}$; von $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$, und von $2\frac{3}{4}$ oder $\frac{11}{4} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 11}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1331}{64} = 20\frac{51}{64}$. Und überhaupt die nte Potenz

Potenz von $\frac{c}{a}$ oder $\left(\frac{c}{a}\right)^n = \frac{ccc\ldots\ldots}{aaa\ldots\ldots} = \frac{c^n}{a^n}$. Also ist überhaupt iede Potenz eines ächten Bruchs ein Bruch, aber kleiner als die Wurzel, und diese Potenzen nehmen von Grad zu Grad ab. Denn $(\frac{1}{2})^3 < (\frac{1}{2})^2$.

Auch ist umgekehrt die Quadrat- oder Kubikwurzel eines Bruchs ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Quadrat- oder Kubikwurzel aus dem Zähler und Nenner der Potenz ist. So ist $\sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$; $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1.1}}{\sqrt{2.2}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{7\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{\sqrt{11.11}}{\sqrt{4.4}} = 2\frac{3}{4}$. Auch ist $\sqrt[3]{\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{1.1.1}}{\sqrt[3]{2.2.2}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{20\frac{51}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1331}{64}} = \frac{\sqrt[3]{11.11.11}}{\sqrt[3]{4.4.4}} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$. Und überhaupt $\sqrt[n]{\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{a}}$.

Auch auf Decimalbrüche lassen sich diese Säze anwenden. Denn man erhält

1. Die Quadratzahlen:

$(\frac{1}{10})^2 = 0{,}1^2 = 0{,}1 \,.\, 0{,}1 = 0{,}01$
$(\frac{1}{100})^2 = 0{,}01^2 = 0{,}01 \,.\, 0{,}01 = 0{,}0001$
$(\frac{1}{1000})^2 = 0{,}001^2 = 0{,}001 \,.\, 0{,}001 = 0{,}000001$
$(\frac{1}{10000})^2 = 0{,}0001^2 = 0{,}0001 \,.\, 0{,}0001 = 0{,}00000001$
u. s. w.

Und umgekehrt die Quadratwurzeln:

$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1 = \frac{1}{10}$
$\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01 = \frac{1}{100}$
$\sqrt{0{,}000001} = 0{,}001 = \frac{1}{1000}$
$\sqrt{0{,}00000001} = 0{,}0001 = \frac{1}{10000}$ u. s. w.

2. Die Kubikzahlen:

$(\frac{1}{10})^3 = 0{,}1^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$
$(\frac{1}{100})^3 = 0{,}01^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}0001 \cdot 0{,}01 = 0{,}000001$
$(\frac{1}{1000})^3 = 0{,}001^2 \cdot 0{,}001 = 0{,}000001 \cdot 0{,}001 = 0{,}000000001$
$(\frac{1}{10000})^3 = 0{,}0001^2 \cdot 0{,}0001 = 0{,}00000001 \cdot 0{,}0001 = 0{,}000000000001$
u. s. w.

Und umgekehrt die Kubikwurzeln:

$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1 = \frac{1}{10}$
$\sqrt[3]{0{,}000001} = 0{,}01 = \frac{1}{100}$
$\sqrt[3]{0{,}000000001} = 0{,}001 = \frac{1}{1000}$
$\sqrt[3]{0{,}000000000001} = 0{,}0001 = \frac{1}{10000}$ u. s. w.

Welches mit den gegebenen Begriffen von den Decimalbrüchen und den Rechnungsarten mit denselben, völlig übereinstimmt. Daß es mit andern und mehrern Zahlzeichen eben die Bewandnis habe, ist leicht zu begreifen.

2. Zusatz.

Ein Produkt wird zu einer gegebenen Potenz erhoben, wenn man ieden Faktor zu der Potenz des verlangten Grades erhebt. So ist von ab die Quadratzahl $= a^2 b^2$; die Kubikzahl $a^3 b^3$, und die nte Potenz $a^n b^n$. Eben so ist die Quadratzahl von $\frac{ab}{cd} = \frac{a^2 b^2}{c^2 d^2}$, die Kubikzahl $\frac{a^3 b^3}{c^3 d^3}$, und die nte Potenz $\frac{a^n b^n}{c^n d^n}$. Und umgekehrt die Wurzel eines gegebenen Grades aus einem Produkte wird extrahirt, wenn man dieselbe aus iedem seiner Faktoren extrahirt, und die einzelnen Wurzeln multiplicirt. So ist z. B. $\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} . \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = ab$. Eben so $\sqrt[3]{a^3 b^3} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^3} = ab$, und überhaupt $\sqrt[n]{a^n b^n} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b^n} = ab$. Ferner $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{c^2 d^2}} = \frac{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}{\sqrt{c^2}\sqrt{d^2}} = \frac{ab}{cd}$; $\sqrt[3]{\frac{a^3 b^3}{c^3 d^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^3}}{\sqrt[3]{c^3}\sqrt[3]{d^3}} = \frac{ab}{cd}$,

und

und überhaupt $\sqrt[n]{\frac{a^n b^n}{c^n d^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b^n}}{\sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d^n}} = \frac{ab}{cd}$. (§. 109.)

Da die Brüche auch eben so gut Quotienten vorstellen können; so gilt der Saz auch für Quotienten.

3. Zusaz.

Daß die Quadrat- und Kubikzahlen insbesondre als auch überhaupt alle Potenzen gleicher Grade, von gleichen Grössen: und umgekehrt die Quadrat- und Kubikwurzeln, auch überhaupt alle Wurzeln gleicher Grade, von gleichen Grössen gleich sein müssen, lehren die Grundsäze der gemeinen Arithmetik. Von ungleichen Grössen hingegen sind sowohl die Quadrat- und Kubikzahlen, als auch alle Potenzen gleicher Grade: und umgekehrt, die Quadrat- und Kubikwurzeln, auch überhaupt alle Potenzen gleicher Grade, ungleich.

Bei Zahlen findet dieser Saz ebenfalls seine Anwendung.

8. Von den Irrationalgrössen.

Lehrsaz.

§. 111. Die Quadratzahl eines unächten Bruchs, dessen Zähler durch seinen Nenner nicht ohne Rest dividirt werden kann, ist auch ein unächter Bruch von eben derselben Art.

Beweis.

Es sei $\frac{b}{a}$ ein unächter Bruch, also $b > a$, iede Grösse aber für sich eine ganze Zahl, die ein Produkt aus ungleichen Primzahlen ist, so daß $\frac{b}{a} = \frac{c.d.e.f....}{l.m.n.o....}$

so

so ist $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c.c.d.d.e.e.f.f\ldots}{l.l.m.m.n.n.o.o\ldots}$, also ein Bruch, wo ieder einfache Faktor im Zähler und Nenner 2mal vorkommt, ohne daß iemals einige Faktoren des Nenners, vielweniger alle, in den Faktoren des Zählers aufgingen, folglich kann $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$ niemals eine ganze Zahl werden, sondern weil $b^2 > a^2$ ein unächter Bruch bleiben.

1. Zusaz.

Eben so würde bei $\left(\frac{b}{a}\right)^3$ ieder einfache Faktor im Zähler und Nenner 3mal; überhaupt bei $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ aber nmal vorkommen. Also kann ganz allgemein $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ niemals eine ganze Zahl werden, sondern weil $b^n > a^n$ durch alle Potenzen ein unächter Bruch bleiben.

2. Zusaz.

Die Potenzen der unächten Brüche nehmen von Grade zu Grade zu, und es ist z. B. $(\frac{5}{4})^3 > (\frac{5}{4})^2 > \frac{5}{4}$.

3. Zusaz.

Ist daher die Quadrat- und Kubikwurzel, oder überhaupt die Wurzel von einem jeden Grade, aus einer ganzen Zahl, keine ganze Zahl, also grösser als die ganze Zahl x, aber kleiner als diese ganze Zahl mit der Einheit vermehrt, $x + 1$: so kann eine solche Wurzel auch nie durch einen Bruch vollkommen genau ausgedrükt werden, weil eine iede Wurzel irgend einer Potenz aus einem ächten oder unächten Bruche ebenfalls ein Bruch von der Art

ist

ist (§. und Zus. 1. verglichen mit §. 110. Zus. 1.); folglich hat eine solche Wurzel weder die Einheit noch einen Theil der Einheit zum Maasse (§. 49.). Beispiele in Zahlen sind $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; und eben so $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{6}$ ꝛc.

Erklärung.

§. 112. Dem Werthe der Wurzeln, der weder durch ganze Zahlen noch durch Brüche vollkommen genau angegeben werden kann, wie z. B. $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$ ꝛc., kann man doch so nahe kommen, als es die Schärfe der Rechnung iedesmal verlangt. Allgemein sieht man, daß $\sqrt{2} > 1$ und < 2 sein muß, folglich hat man wenigstens an 1 und 2 ein Paar Gränzen, zwischen welchen der wahre Werth der Quadratwurzel aus 2 enthalten ist.

Dergleichen Grössen, wie die genannten Wurzeln, nennt man überhaupt Irrationalgrössen, und wenn sie durch Zahlzeichen ausgedrükt werden, Irrationalzahlen. Alle übrigen Grössen aber heissen im Gegensaz iener, Rationalgrössen, so wie die Zahlen, Rationalzahlen. Eine Potenz heißt daher überhaupt eine vollkommne Potenz, wenn die Wurzel eines gegebenen Grades aus derselben rational; unvollkommen hingegen, wenn die Wurzel irrational ist *). Daher giebt es vollkommene und unvollkommene Quadrat- und Kubikwurzeln. Folgende Tabelle enthält die rationalen

*) Eine und eben dieselbe Grösse kann bald rational, bald irrational sein, ie nachdem sie zu diesem oder ienem Wurzelexponenten gehört. So ist z. B. $\sqrt{4}$ rational, $\sqrt[3]{4}$ aber irrational. Umgekehrt, $\sqrt{8}$ ist irrational, $\sqrt[3]{8}$ aber rational.

nalen Wurzeln von 1 bis 10, mit den dazu gehörigen Quadrat- und Kubikzahlen.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadratzahlen	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Kubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

9. Von den unmöglichen oder eingebildeten Grössen.

Lehrsaz.

§. 113. Von ieder positiver Grösse sind alle Potenzen positive; von ieder negativen Grösse aber sind alle Potenzen deren Exponenten gerade, positive, deren Exponenten aber ungerade Zahlen sind, negative Grössen.

Beweis.

Es sei die positive Grösse a; so ist an sich klar, daß

$$a^2 = +a \,.\, +a = +a^2$$
$$a^3 = +a^2 \,.\, +a = +a^3$$
$$a^4 = +a^3 \,.\, +a = +a^4 \text{ ꝛc. (§. 100.)}$$

Auch sei die negative Grösse — a; so ist

$$(-a)^2 = -a \,.\, -a = +a^2 \quad \text{(§. 100)}$$
folglich $$(-a)^3 = +a^2 \,.\, -a = -a^3 \quad \text{(§. 110.)}$$
$$(-a)^4 = -a^3 \,.\, -a = +a^4$$
$$(-a)^5 = +a^4 \,.\, -a = -a^5 \text{ ꝛc.}$$

Also wechseln s. f. die Zeichen der Potenzen mit einander ab.

Ist nun n eine ganze Zahl, so kann 2 n iede gerade, $2n + 1$ oder $2n - 1$ iede ungerade Zahl ausdrüken, und es ist allgemein $(-a)^{2n} = +a^{2n}$; $(-a)^{2n+1}$ aber $= -a^{2n+1}$.

1. Zu-

1. Zusaz.

Jede Wurzel eines geraden Wurzelexponenten, aus einer positiven Grösse kann daher so wohl positiv, als negativ; iede Wurzel eines ungeraden Wurzelexponenten aber, aus einer positiven Grösse kann nur positiv, und aus einer negativen nur negativ; iede Wurzel eines geraden Wurzelexponenten hingegen, aus einer negativen Grösse kann weder positiv noch negativ sein.

So ist im ersten Fall $\sqrt[2]{a^2}$ sowohl $+ a$ als $- a$, weil $+ a . + a$, aber auch $- a . - a = + a^2$. Eben so $\sqrt{4} =$ so wohl $+ 2$, als auch $- 2$. Ferner $\sqrt[8]{a^7} = \mp \sqrt[8]{a^7}$; $\sqrt[4]{a^4} = \mp \sqrt[4]{a^4}$; und überhaupt $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \mp \sqrt[2n]{a^{2n}}$, und $\sqrt[2n]{a^x} = \mp \sqrt[2n]{a^x}$.

Im zweiten Fall $\sqrt[3]{27} = + 3$; $\sqrt[3]{- 27} = - 3$; eben so $\sqrt[3]{a^3} = + a$; $\sqrt[3]{a^3} = - a$; ferner $\sqrt[5]{- a^3} = - \sqrt[5]{- a^3}$; und überhaupt $\sqrt[2n+1]{- a^{2n+1}} = - \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = - a$; und $\sqrt[2n-1]{- a^x} = - \sqrt[2n-1]{a^x}$ (§. 110.).

Im dritten Fall aber $\sqrt{- a^2}$; $\sqrt[4]{- a^3}$; $\sqrt[6]{- a^4}$ oder überhaupt $\sqrt[2n]{- a^{2n}}$ oder $\sqrt[2n]{- a^x}$ unmöglich, weil weder 2 noch 4 noch 6 noch 2n gleiche Faktoren ein negatives Produkt oder eine negative Potenz geben, wie aus dem § folgt, welches doch nach §. 110. nothwendig ist, wenn die Wurzel des 2ten, 4ten, 6ten, oder 2nten Grades angegeben werden soll.

2. Zusaz.

Also ist eine Wurzel von einem geraden Wurzelexponenten, aus einer im ersten Zusaz, im dritten Fall angegebenen Grösse, zu extrahiren unmöglich. Daher nennt man diese Wurzeln unmögliche oder eingebildete Grössen *).

10. Von

*) In der Folge werden Beispiele lehren, daß die Untersuchung dieser Grössen dennoch ihren Nuzen hat.

10. Von den vier Rechnungsarten mit Potenzen.

Aufgaben.

§. 114. Potenzen zu einander zu addiren und von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Wenn die Potenzen oder nur die Exponenten derselben verschieden sind. Man addire und subtrahire solche nach den in §. 99. rc. und §. 102. rc. gegebenen Regeln. Z. B. zu a^3 addirt b^2 ist $a^3 + b^2$; a^6 zu a^4 ist $a^6 + a^4$. Eben so b^3 von a^4 ist $a^4 - b^3$; $4a^3$ von $9a^5$ ist $9a^5 - 4a^3$.
2. Wenn die Potenzen so wohl als die Exponenten gleich sind: so ist die Summe $4a^6 + 5a^6 = 9a^6$ und die Differenz $8a^3 - 3a^3 = 5a^3$.

§. 115. Potenzen in einander zu multiplieiren, und mit einander zu dividiren.

Auflösung.

1. Wenn die Potenzen ungleich sind, so läßt sich die Multiplikation und Division nur durch die gewöhlichen Zeichen angeben. So giebt z. B. a^4 multiplicirt mit b^3 das Produkt $= a^4 b^3$. Eben so a^4 dividirt mit d^3 den Quotient $= \frac{a^4}{d^3}$. Oder allgemein a^m multiplicirt mit $b^n = a^m b^n$, und a^m dividirt mit $b^n = \frac{a^m}{b^n}$.
2. Wenn die Potenzen gleich sind, so ist
   a) Die Multiplikationsregel: Man behalte die Potenz, und gebe ihr einen Exponenten, welcher die Summe der Exponenten der Faktoren ist. Z. B. $a^3 . a^2$

$a^3 . a^2 = a^5$, denn $a^3 . a^2 = aaa . aa = a^5$. Allgemein $a^m . a^n = a^{m+n}$.

b) Die Divisionsregel: man behalte die Potenz und gebe ihr einen Exponenten, welcher die Differenz vom Exponenten des Dividendi und des Divisors ist. Z. B. $a^6 : a^3 = \frac{aaaaaa}{aaa} = aaa = a^{6-3} = a^3$. Allgemein $a^m : a^n = a^{m-n}$. *)

Lehrsaz.

§. 116. Jede Potenz, deren Exponent 1, ist ihrer Wurzel gleich; iede Potenz aber, deren Exponent 0, ist der Einheit gleich; und iede Potenz, deren Exponent negativ, ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner dieselbe Potenz mit dem positiven Exponenten ist.

Beweis.

$x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1$, und auch $x^3 : x^2 = \frac{xxx}{xx} = x$, also ist $x^1 = x$; Ferner $x^1 : x^1 = x^{1-1} = x^0$, aber auch $x^1 : x^1 = x : x = 1$, folglich $x^0 = 1$. Auch ist $x^2 : x^5 = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, denn $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1 . xx}{xxxxx} = \frac{1}{x^3}$, oder allgemein $x^{-n} = x^{0-n} = \frac{x^0}{x^n} = \frac{1}{x^n}$ (§. 115.) **).

Auf-

*) Zusammengesezte Potenzen werden ebenfalls addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, wobei man ausser den gegebenen, und den Regeln der Rechnungsarten im Allgemeinen, keine besondern nöthig hat.

**) Aus der Lehre von den negativen Exponenten kann man die Lehre von den Decimalbrüchen herleiten, und überhaupt alle mögliche Zahlensysteme entwikeln.

Aufgabe.

§. 117. Eine Potenz von neuen, auf eine Potenz von einem andern Exponenten zu erheben.

Auflösung.

Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem gegebenen neuen Exponenten; so ist das Produkt der Exponent der verlangten Potenz, welche mit der gegebenen einerlei Wurzel hat.

Es ist $(a^3)^2 = a^6$, $(b^4)^5 = b^{20}$; ferner $(x^2 . y^3)^3 = x^6 y^9$. Allgemein: $(x^m)^n = x^{mn}$; auch $(x^m . y^r)^n = x^{mn} y^{rn}$. Denn $(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^{3+3} = a^6$; $(b^4)^5 = b^4 . b^4 . b^4 . b^4 . b^4 = b^{4+4+4+4+4} = b^{20}$, und $(x^2 . y^3)^3 = x^2 x^2 x^2 . y^3 y^3 y^3 = x^{2+2+2} . y^{3+3+3} = x^6 y^9$.

Auch bei negativen Exponenten gilt der Saz.

$(x^{-2})^3 = x^{-6}$, denn $(x^{-2})^3 = x^{-2} . x^{-2} . x^{-2} = x^{-6}$; also allgemein $(x^{-n})^m = x^{-nm}$.

1. Zusaz.

Soll daher umgekehrt die Wurzel von einem gegebenen Wurzelexponenten, aus einer gegebenen Potenz extrahirt werden; so dividirt man den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem verlangten Wurzelexponenten. Der erhaltene Quotient giebt den Exponenten einer Potenz von eben der Wurzel, welches die gesuchte ist.

So ist $\sqrt{a^8} = \sqrt[2]{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = a^4$; $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$; $\sqrt[7]{a^{56}} = a^{\frac{56}{7}} = a^8$; überhaupt $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Ferner $\sqrt{a^2 b^8} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^8} = a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{8}{2}} = a b^4$ (§. 110. Zus. 1.); und überhaupt $\sqrt[x]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{x}} b^{\frac{n}{x}}$ rc.

Auch bei negativen Exponenten findet der Saz seine Anwendung.

$\sqrt{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{2}} = a^{-1}$; $\sqrt[3]{a^{-9}} = a^{-\frac{9}{3}} = a^{-3}$.

Allgemein: $\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$.

2. Zusaz.

Geht die Division nicht auf, so kann man den Exponenten als einen Bruch schreiben, wie bei Formeln im Allgemeinen. Z. B. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[7]{x^3} = x^{\frac{3}{7}}$; und überhaupt $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Potenzen dieser Art werden **Bruchpotenzen** genannt. Weil nun $a = a^1$ ist, so ist $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ 2c., und überhaupt $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; und umgekehrt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$; überhaupt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Wenn die Exponenten unächte Brüche sind; so ist $a^{1\frac{2}{3}} = a^3 . a^{\frac{2}{3}} = a^3 \sqrt[3]{a^2}$; $a^{1\frac{3}{4}} = a^3 . a^{\frac{3}{4}} = a^3 \sqrt[4]{a^3}$. Auch ist $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a\sqrt[4]{a}$, weil $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a^2 . a^{-\frac{3}{4}} = a^{1\frac{1}{4}}$. 2c.

Hieraus sieht man, daß das gewöhnliche Wurzelzeichen entbehrt werden könnte, wenn statt desselben diese gebrochene Potenzen geschrieben würden.

11. Von den Wurzelgrössen und ihren Rechnungsarten.

Erklärung.

§. 118. Wird aus einer Grösse die Wurzel durch Vorsezung des Wurzelzeichens extrahirt, also blos angezeigt, so heißt der gesammte Ausdruk eine **Wurzelgrösse**. Da nun aus allen vollkommenen Poten-

zen die verlangte Wurzel wirklich extrahirt werden kann (§. 112.): so nennt man auch nur diejenigen Ausdrüke vorzugsweise Wurzelgrössen, welche keinen rationalen Werth in sich enthalten als $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. Ferner $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[x]{a^m b^n}$. Wurzelgrössen haben einerlei Benennung, wenn sie gleiche Wurzelexponenten haben. So sind $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ von einerlei, $\sqrt{5}$ und $\sqrt[3]{9}$ hingegen von verschiedner Benennung.

1. Zusaz.

Nach §. 117. 2. Zus. ist $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, also kann man Bruchpotenzen als Wurzelgrössen, und umgekehrt: Wurzelgrössen als Bruchpotenzen ausdrüken, folglich gelten die Regeln für die Behandlung der einen Art, auch für die andere. Ferner die Wurzelgrössen begreifen vorzüglich Irrationalgrössen in sich, also sind auch diese unter den Rechnungsarten der Wurzelgrössen enthalten. Haben die Nenner der Exponenten zweier oder mehrerer Bruchpotenzen eine und eben dieselbe Grösse, so sind die Bruchpotenzen von einerlei Benennung.

2. Zusaz.

In Fällen, wo eine Wurzelgrösse als ein Produkt aus zwei solchen Faktoren angesehen werden kann, aus dem einen sich die verlangte Wurzel genau extrahiren läßt; so kann der Ausdruk zum Theil von seiner Irrationalität befreiet werden, denn man darf nur die verlangte Wurzel aus diesem Faktor extrahiren, und vor das Wurzelzeichen; denienigen Faktor aber, aus welchem die Wurzel nicht extrahirt werden kann, hinter dasselbe sezen. So ist z. B. $\sqrt{8} = \sqrt{(4 \cdot 2)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{28} = \sqrt{(4 \cdot 7)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$. Auch $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{(8 \cdot 2)} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{(8 \cdot 5)} =$

$\sqrt[3]{8}$

$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$. Ferner $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$; $\sqrt{32 a^4 b^2} = \sqrt{16 a^4 \cdot 2} = 4a^2 b\sqrt{2}$ 2c.

Umgekehrt: auch kann ein Produkt aus einer Rationalgrösse in eine Wurzelgrösse völlig als eine Wurzelgrösse ausgedrükt werden, denn man darf nur die vor dem Wurzelzeichen stehende Grösse in dieienige Potenz erheben, welche den Wurzelexponent anzeigt, und solche mit der unter dem Wurzelzeichen sich befindlichen Grösse multipliciren. So ist z. B. $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$; $2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$. Allgemein $a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$ 2c.

3. Zusaz.

Da die Bruchpotenzen und Wurzelgrössen mehrere Eigenschaften mit den Brüchen gemein haben; so wird der Werth einer Bruchpotenz oder einer Wurzelgrösse nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner des Exponenten der Bruchpotenz, oder den Exponent der Potenz und der Wurzel von der Wurzelgrösse mit einer und eben derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Lehrsaz.

§. 119. Wenn das Quadrat einer Irrationalgrösse rational ist; so sind alle gerade Potenzen rational, alle ungerade hingegen irrational.

Beweis.

Es sei a rational, und $\sqrt{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ irrational; $2n$ aber bezeichne iede gerade, und $2n + 1$ iede ungerade Zahl; so ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$, und $(a^{\frac{1}{2}})^{2n} = a^n$, also beide Ausdrüke rational. Hingegen $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, und $(a^{\frac{1}{2}})^{2n+1} = a^n \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^n\sqrt{a}$, aber irrational.

Aufgaben.

§. 120. Wurzelgrössen unter einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung.

Sollen $\sqrt[n]{x^m}$ und $\sqrt[r]{y^t}$ unter einerlei Benennung gebracht werden; so ist $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ und $\sqrt[r]{y^t} = y^{\frac{t}{r}}$ (§. 117. Zus. 2.). Aber $\frac{m}{n}$ und $\frac{t}{r}$ giebt, nach den gewöhnlichen Regeln $\frac{mr}{nr} = \frac{m}{n}$, und $\frac{tn}{rn} = \frac{t}{r}$. Folglich $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{mr}{nr}}$ und $y^{\frac{t}{r}} = y^{\frac{tn}{rn}}$, und als Wurzelgrössen ausgedrükt $x^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{x^{mr}}$, und $y^{\frac{tn}{rn}} = \sqrt[rn]{y^{tn}}$.

§. 121. Wurzelgrössen zu einander zu addiren, und von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Wurzelgrössen von verschiedenen Benennungen können nur vermittelst der Zeichen addirt und subtrahirt werden. Z. B. $\sqrt[n]{x^m} \mp \sqrt[r]{y^t}$.
2. Wenn die Wurzelgrössen einerlei Benennung haben, oder unter einerlei Benennung gebracht sind; so addire oder subtrahire man die vor dem Wurzelzeichen stehende Grössen. Z. B. $n\sqrt[m]{a} \mp p\sqrt[m]{a} = (n \mp p)\sqrt[m]{a}$, oder $3\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$; $5\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = -3\sqrt{a}$. Für Zahlen findet man sehr abgekürzte Ausdrüke. Z. B. $\sqrt{63} + \sqrt{28} = \sqrt{(9 \cdot 7)} + \sqrt{(4 \cdot 7)} = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$, und $\sqrt{63} - \sqrt{28} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = \sqrt{7}$.

§. 122. Wurzelgrössen in einander zu multipliciren und mit einander zu dividiren.

Auflösung.

Man bringe die Wurzelgrössen, wenn sie verschiedene Benennungen haben, unter einerlei Benennung nach

§. 120.,

§. 120., und multiplicire oder dividire blos die unter den Wurzelzeichen stehende Grössen. Z. B. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[rn]{a^r} \cdot \sqrt[rn]{b^n} = \sqrt[rn]{a^r b^n}$. Und $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $ab\sqrt{ce} : bf\sqrt{ge} = \frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{ab}{bf} \cdot \sqrt{\frac{ce}{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$; $pq\sqrt[rn]{a^r}\sqrt[rn]{b^n} : p\sqrt[rn]{a^r} = q\sqrt[rn]{b^n}$. In Zahlen: $3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6} = 12\sqrt{12}$; $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{216} = 6$. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{9}-\sqrt{4} = 3-2 = 1$. Und $\sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{168} : \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{\frac{168}{250}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$.

Die Beweise der in möglichster Kürze vorgetragenen Säze ergeben sich von selbst aus dem Vorhergehenden, weil die allgemeinen Regeln hier nur auf besondere Fälle angewandt sind.

Anmerkung.

Die in dieser, und in einigen vorhergehenden Abtheilungen vorgetragenen Lehren, leiden allerdings eine grössere Ausdehnung, aber zu den Anfangsgründen werden sie hinreichend sein. Wer sich vollständig damit bekannt machen will, findet ausführlichern Unterricht in **Karstens**, **Kästners** und v. **Segners** **Lehrbüchern**.

12. Allgemeines Potenziren.

Lehrsaz.

§. 123. Die Potenz einer, durch die Addition verbundenen zweitheiligen Grösse, oder eines **Binomiums** ist ein solches Produkt, in welchem die zweitheilige Grösse als Faktor so vielmal vorkommt, als der Exponent dieser Potenz Einheiten enthält.

Verbindet man die gewöhnlichen Regeln der allgemeinen Multiplikation mit den Lehren §. 110., so erhält man folgende Formeln der Potenzen:

$$\begin{array}{rl} R = & a + b \text{ *)} \\ & a + b \\ \hline & ab + b^2 \\ & a^2 + ab \\ \hline R^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \text{ II. Potenz **)} \\ & a + b \\ \hline & a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline R^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ III. Potenz ***)} \end{array}$$

Sezt

*) Vergleicht man diese allgemeinen Begriffe mit Zahlen, und sezt $a = 10$, $b = 2$; so ist $a + b = 10 + 2 = 12$. Da nun die Quadratwurzel nach geometrischen Begriffen mit der Seite eines Quadrats, und die Kubikwurzel mit der Seite eines Würfels einerlei ist: so kann man $a + b$ in dem ersten Falle, als die Grösse der Seite eines Quadrats, im andern Falle aber, als die Grösse der Seite eines Würfels ansehen, weil man beide ebenfalls in 2 beliebige oder vorgeschriebene Theile theilen kann. Diese und die folgenden Bemerkungen sezen die ersten Begriffe der Geometrie voraus, die aber ein ieder leicht einsieht, wenn man Zeichnungen oder dazu eingerichtete Modelle zu Hülfe nimmt. Wer diese Vergleichungen hier am unrechten Orte, oder vorizt zu schwer findet, kann solche bis dahin überschlagen, wo die Geometrie diese Begriffe erläutert.

**) Die Formel $a^2 + 2ab + b^2$ wird durch ein Quadrat völlig erläutert, dessen Seite $a + b$ ist. Sezt man $a = 10$, $b = 2$, so kann man die Länge und Breite des Quadrats, die von einerlei Grösse sind, iede für sich in 12 gleiche Theile theilen. Ziehe man durch die zehnten Theilungspunkte ein Paar gerade Linien, wie in Fig. 1. Tafel 1. der Geometrie: so erhält man folgende Theile der Fläche, die zusammengenommen der ganzen Fläche gleich sind. Nämlich:

1. a^2

Sezt man auf diese Art die Rechnung fort, so erhält man

IV. Potenz ****).

$$R^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

1.	$a^2 = 10 . 10 = 10^2$	$= 100$,	ein Quadrat
2.	$ab + ab = 2ab = 10.2 + 10.2$	$= 40$,	zwei Rechteke
3.	$b^2 = 2 . 2 = 2^2$	$= 4$,	ein Quadrat

$a^2 + 2ab + b^2 = 10^2 + 2(10.2) + 2^2 = 144 =$ dem ganzen Quadrate.

Da nun $144 = 12^2$ und $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ist; so hat das Quadrat durch diese Theilung nichts verlohren, und dennoch die Formel bestätiget.

***) Die Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ kann auf folgende Art durch einen Würfel von Holz oder Metall, oder durch eine Zeichnung erläutert werden. Man theile Länge, Breite und Höhe des Würfels, die einander gleich sind, in 12 gleiche Theile nach der Wurzel $a + b$, so daß $a = 10$, $b = 2$ ist, und durchschneide den Würfel in dem 10ten Theilungspunkte, wie in Fig. 2. Tafel I. der Geometrie: so erhält man folgende Theile des Würfels, die Körper für sich, und doch zusammengenommen dem ganzen Würfel gleich sind.

1.	$a^3 = 10 . 10 . 10 = 10^3$ ein Würfel	$=$	1000,
2.	$3a^2b = 3 (10^2 . 2)$ drei Parallelepipeda, iedes 200	$=$	600,
3.	$3ab^2 = 3 (10 . 2^2)$ drei Parallelepipeda, iedes 40	$=$	120,
4.	$b^3 = 2 . 2 . 2 = 2^3$ ein Würfel	$=$	8,

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 = 1728$ = dem ganzen Würfel.

Da nun $1728 = 12^3$, und $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ ist: so hat der Würfel durch diese Theilung nichts verlohren, und doch die Formel bestätiget.

Beide Formeln sind daher in der Geometrie gegründet.

****) Die vierte und die folgenden Potenzen können durch die Geometrie nicht erläutert werden, weil sie blosse Rechnungsvortheile sind.

V. Potenz.

$$R^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

VI. Potenz.

$$R^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

VII. Potenz.

$$R^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

VIII. Potenz.

$$R^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

IX. Potenz.

$$R^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

X. Potenz.

$$R^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

Der Beweis liegt in den Gründen der allgemeinen Multiplikation und im 110. §.

1. Zusatz.

Sind die beiden Grössen durch die Subtraktion verbunden, so erhält man die Formeln der Potenzen auf diese Art.

$$\begin{array}{rrrr} R = & a & - b & \\ & a & - b & \\ \hline & - ab & + b^2 & \\ a^2 & - ab & & \\ \hline R^2 = a^2 & - 2ab & + b^2 & \text{II. Potenz} \end{array}$$

$R^3 =$

sind In der Geometrie selbst am gehörigen Orte, wird die Nichtexistenz der vierten und folgenden Potenzen bewiesen werden.

$$
\begin{array}{rcccccccl}
R^2 & = & & a^2 & - & 2ab & + & b^2 & \text{II. Potenz} \\
 & & & & & a & - & b & \\
\hline
 & & & - & & a^2b & + & 2ab^2 & - \; b^3 \\
 & & a^3 & - & 2a^2b & + & ab^2 & & \\
\hline
R^3 & = & a^3 & - & 3a^2b & + & 3ab^2 & - \; b^3 & \text{III. Potenz}
\end{array}
$$

Auf diesem Wege bekommt man auch die Formeln für die folgenden Potenzen.

IV. Potenz.

$$R^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

V. Potenz.

$$R^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \text{ etc.}$$

Also bekommen nach diesem Geseze alle ungeraden Potenzen von b das Zeichen —, die geraden aber das Zeichen + wovon der Grund in der Wurzel — b liegt.

$(a + b)\ (a - b)$ hingegen giebt $a^2 - b^2$ oder die Differenz der Quadrate der beiden Theile der Wurzel:

$$
\begin{array}{lccc}
\text{Denn} & & a + b & \\
 & & a - b & \\
\hline
 & - & ab & - \; b^2 \\
 & a^2 + & ab & \\
\hline
 & a^2 & - & b^2
\end{array}
$$

2. Zusaz.

Wendet man diese Rechnungsregeln auf die durch Zahlzeichen ausgedrükte Grössen an, so erhält man ebenfalls die zweite, dritte und alle folgende Potenzen

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & & & \overbrace{a \quad + \quad b} & & & \\
R & = & & 10 \quad + \quad 2 & = & 12 & \\
 & & & 10 \quad + \quad 2 & = & 12 & \\
\hline
 & & & 10.2 \quad + \quad 2^2 & = & 24 & \\
 & & 10^2 \; + & 10.2 & = & 12 & \\
\hline
R^2 & = & 10^2 & + 2\,(10.2) + 2^2 & = & 144 & \text{II. Potenz.}
\end{array}
$$

D. i.

D. i., die Quadratzahl einer zweitheiligen Wurzel besteht aus den Quadratzahlen der beiden Theile, und dem doppelten Produkte der beiden Theile der Wurzel in einander.

$$\begin{array}{rl} 10^2 + 2\,(10.2) + 2^2 & = 144 \\ 10 + 2 & = 12 \\ \hline 10^2.2 + 2\,(10.2^2) + 2^3 & = 288 \\ 10^3 + 2\,(10^2.2) + 10.2^2 & = 144 \\ \hline 10^3 + 3\,(10^2.2) + 3\,(10.2^2) + 2^3 & = 1728 \text{ III. P.} \end{array}$$

D. i., die Kubikzahl einer zweitheiligen Wurzel besteht aus den Kubikzahlen der beiden Theile, aus dem dreifachen Produkte der Quadratzahl des ersten Theils in den zweiten, und aus dem dreifachen Produkte des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel.

3. Zusaz.

Die Potenzen einer vieltheiligen Grösse, oder eines Multinomiums entstehen auf eben die Art:

$$\begin{array}{l} a + b + c \\ a + b + c \\ \hline a^2 + ab + ac \\ \quad + ab \qquad + b^2 + bc \\ \qquad + ac \qquad + bc + c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \text{ II. Potenz} \\ \qquad\qquad a + b + c \\ \hline a^3 + 2a^2b + 2a^2c + ab^2 + 2abc + ac^2 \\ \quad + a^2b \qquad + 2ab^2 + 2abc \qquad + b^3 + 2b^2c + bc^2 \\ \qquad + a^2c \qquad + 2abc + 2ac^2 \qquad + b^2c + 2bc^2 + c^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \end{array}$$

III. Potenz *)

Wählt

*) Die Formeln der Potenzen von $a + b + c$ können auf die vorige

Wählt man an statt der Buchstaben Zahlen wie im Zus. 2., z. B. 112, so kann man $a = 100$, $b = 10$, $c = 2$ sezen und auf eben diese Art verfahren.

4. Zusaz.

Jede Potenz einer vieltheiligen Grösse kann man nach der Potenz einer zweitheiligen Grösse ordnen, wenn man die ersten Theile der vieltheiligen Grösse als den ersten, den lezten aber als den zweiten Theil der zweitheilige Grösse annimmt. So ist

$$\begin{aligned}
\text{A.}\quad (a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2,\\
\text{d. i.}\quad (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\
2(a+b)c &= \qquad\qquad 2ac + 2bc\\
c^2 &= \qquad\qquad\qquad c^2
\end{aligned}$$

$$\text{also}\quad (a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$\begin{aligned}
\text{B.}\quad (a+b+c)^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3,\\
\text{d. i.}\quad (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\
3c(a+b)^2 &= 3c(a^2 + 2ab + b^2) = 3a^2c + 6abc + 3b^2c\\
3c^2(a+b) &= 3c^2a + 3c^2b\\
c^3 &= c^3
\end{aligned}$$

$$\text{also}\quad (a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3.$$

Da nach diesem Verfahren alle Potenzen einer vieltheiligen Grösse auf die Potenz einer zweitheiligen gebracht werden können; so hat man nur nöthig, sich mit der Natur und Zusammensezung der Potenzen der zweitheiligen Grössen bekannt zu machen.

5. Zu-

rige Art durch die Geometrie ebenfalls erläutert werden, wenn man die Seite eines Quadrats und eines Würfels in drei Theile theilt, und nach der Grösse $a + b + c$ durchscheidet.

5. Zusaz.

Aus den Formeln für die Potenzen einer zweitheiligen Wurzel sieht man, wenn sie ohne Coefficienten geschrieben werden, daß die Potenzen von $a + b$ in einer gewissen Ordnung zu- und abnehmen, und daß ihre Summe in allen Gliedern gleich groß ist.

Verlangt man z. B. die neunte oder zehnte Potenz von $a + b$, so gehen die Glieder ohne Coefficienten in folgender Ordnung fort:

IX. Potenz

$$a^9,\ a^8b,\ a^7b^2,\ a^6b^3,\ a^5b^4,\ a^4b^5,\ a^3b^6,\ a^2b^7,\ ab^8,\ b^9.$$

X. Potenz

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$$

6. Zusaz.

Die zu den Gliedern jeder Potenz gehörigen Coefficienten findet man, wenn man $a = 1$, $b = 1$ annimmt, also $a + b = 1 + 1$ für die erste Potenz, und alsdenn wie vorhin potenzirt. So ist.

$1 + 1$	Coefficienten der I. Potenz
$1 + 1$	
$1 + 1$	
$1 + 1$	
$1 + 2 + 1$	Coefficienten der II. Potenz
$1 + 1$	
$1 + 2 + 1$	
$1 + 2 + 1$	
$1 + 3 + 3 + 1$	Coefficienten der III. Potenz

Sezt man auf diese Art die Rechnung fort, so entsteht folgende Tabelle:

Poten=

Potenzen	Coefficienten
I.	- - - - - - - 1, 1.
II.	- - - - - - - 1, 2, 1.
III.	- - - - - - - 1, 3, 3, 1.
IV.	- - - - - - 1, 4, 6, 4, 1.
V.	- - - - - - 1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	- - - - - 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	- - - - - 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII.	- - - 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX.	- - - 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	- - 1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1.

Also kann man nach dieser Tabelle die Potenzen von $a + b$ zusammensezen, ohne daß die etwas mühsame Rechnung vorgenommen werden darf. Verglichen mit Zusaz 5.

7. Zusaz.

Aus der Summe der Coefficienten, erhält man, wenn wie in Zusaz 6, $a = 1$, $b = 1$ gesezt wird, Potenzen von 2, nämlich:

I. Potenz $1 + 1 = 2 = 2^1$
II. — $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$
III. — $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$
IV. — $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$
V. — $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$
VI. — $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$
VII — $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$
VIII. — $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256 = 2^8$
IX. — $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9$
X. — $1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024 = 2^{10}$

Hieraus folgt, daß die Coefficienten der zweiten und folgenden Potenzen, von Anfang bis in die Mitte zu- und in eben der Ordnung bis zu Ende abnehmen. Bei den geraden Potenzen, nämlich 2, 4, 6, 8 rc. steht der

der größte Coefficient in der Mitte, bei den ungeraden Potenzen aber, 3, 5, 7 ꝛc. sind die beiden mittlern Glieder einander gleich. Damit man nun die Coefficienten einer ieden gegebenen Potenz finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen: so seze man folgende Brüche z. B. für die 5te Potenz nach der hier angegebenen Ordnung hintereinander, so daß die Zähler von der verlangten Potenz anfangen, und bei iedem folgenden Bruche um Eins vermindert, die Nenner hingegen mit eins anfangen, und bei iedem folgenden Bruche um Eins vermehrt werden.

$\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}.$

Da nun bei ieder Potenz der erste Coefficient 1 ist, so giebt der erste Bruch den zweiten Coefficienten; das Produkt der zwei ersten Brüche, den dritten, das Produkt der drei ersten Brüche, den vierten Coefficienten, und auf diese Art fort. So ist in diesem Beispiele

der 1ste Coefficient				1.
= 2te	—	$\frac{5}{1}$	=	5.
= 3te	—	$\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2}$	=	10.
= 4te	—	$\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3}$	=	10.
= 5te	—	$\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{4}$	=	5.
= 6te	—	$\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5}$	=	1.

Für die zweite Potenz hat man folgende Brüche: $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$, und es ist

der 1ste Coefficient			=	1.
= 2te	—	$\frac{2}{1}$	=	2.
= 3te	—	$\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$	=	1.

Für die dritte Potenz: $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$, daher ist nach dem vorigen

der 1ste Coefficient			=	1.
= 2te	—	$\frac{3}{1}$	=	3.
= 3te	—	$\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2}$	=	3.
= 4te	—	$\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3}$	=	1.

Auf

Auf diese Art kann man die Coefficienten für alle gegebene Potenzen finden *).

9. Zusaz.

Vermittelst der allgemeinen Zeichen kann man die Brüche, welche die Coefficienten geben, hinschreiben, ohne die Rechnung wirklich vorzunehmen, und auf diese Art eine iede verlangte Potenz von $a + b$ anzeigen.

So ist z. B.

$$(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1} ab + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} b^2.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1} a^2 b + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} ab^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3.$$

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1} a^3 b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} ab^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4.$$

$$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1} a^4 b + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^3 b^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2 b^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} ab^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} b^5.$$

$$(a+b)^6 = a^6 + \frac{6}{1} a^5 b + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} a^4 b^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^2 b^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} ab^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} b^6.$$

Also

*) Dies Verfahren gründet sich auf die Lehren von dem Kombiniren und Permutiren der Grössen, die hier der nothwendigen Kürze wegen nicht ausführlich vorgetragen werden können. Wer darüber nachlesen will, dem sind folgende Schriften zu empfehlen. Vollständige Anleitung zur Algebra, von Leonhard Euler. St. Pe-

Also auch $(a+b)^{50} = a^{50} + \frac{50}{1} a^{49}b + \frac{50.49}{1.2} a^{48}b^2$ $+ \frac{50.49.48}{1.2.3} a^{47}b^3 + \frac{50.49.48.47}{1.2.3.4} a^{46}b^4 + \frac{50.49.48.47.46}{1.2.3.4.5} a^{45}b^5 + \frac{50.49.48.47.46.45}{1.2.3.4.5.6} a^{44}b^6 +$ 2c. Daß man sich derselben Formel für die 50ste Potenz der Grösse $a - b$ bedienen kann, wenn nur die Zeichen gehörig verändert werden, erhellt aus Zusaz 1.

10. Zusaz.

Anstatt der Formeln für iede einzeln gegebene Potenz kann man sich der binomischen Regel, oder kurz des Binomiums bedienen, welches eine allgemeine Formel für iede Potenz n einer binomischen Grösse $a+b$ ist. Nach dieser Formel ist $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b$ $+ \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.} a^{n-3}b^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4}b^4 + \ldots\ldots$ $+ \frac{n.n-1.n-2.n-3\ldots n-r+1}{1.2.3.4\ldots r} a^{n-r}b^r +$ 2c. *).

Für

St. Petersburg 1771. Erster Theil §. 340. u. f. Der selbstlehrende Algebraist, von Abel Bürja Berlin 1786. Erster Theil, fünftes Hauptstük, §. 20. u. f. Damit kann man vergleichen: Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Algebra, von Joh. Andr. Christian Michelsen. Berlin 1788. §. 159. u. f.

*) Der Beweis dieser allgemeinen Formel wird gewöhnlich durch die Differenzialrechnung geführt

Man findet denselben in des Herrn Hofrath Kästners Analysis des Unendlichen. §. 56. Auch haben denselben der Herr von Segner

Für diese Formel kann man auch zwei andere nehmen, die erste für positive, die zweite für negative Exponenten. Denn es ist auch

$$1)\ (a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \ldots\ldots\right)$$

$$2)\ (a+v)^n = a^n\left(1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{v}{a+v} + \frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{v^2}{(a+v)^2} + \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\cdot\frac{v^3}{(a+v)^3} + \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4}\cdot\frac{v^4}{(a+v)^4} + \ldots\ldots\right)$$

ner und der Herr Hofrath Kästner vermittelst der Analysis der endlichen Grössen geführt. Ersterer in seinem lateinischen Lehrbuche: Cursus mathem. P. II. §. 248.; lezterer in seiner Analysis der endlichen Grössen. §. 116. ff.

Für Anfänger ist dieser Beweis am leichtesten und dennoch mit vieler Gründlichkeit geführt worden von dem Herrn Prof. Klügel, im Anhange seiner Analytischen Trigonometrie. Braunschweig 1770. Unter der Ueberschrift: Erweis des binomischen und polynomischen Lehrsazes für jede Gattung von Exponenten.

Damit kann man vergleichen des Herrn Prof. Röslers: Allgemein faßliche Anleitung zur Algebra. Stuttgard 1789. 1ster Theil, das siebente Kapitel.

Ferner ist zu empfehlen der elementarische Beweis des allgemeinen binomischen Lehrsazes von dem Herrn Prof. Busse in seinen kleinen Beiträgen zur Mathematik und Physik und deren Lehrmethode. Leipzig 1786. Erster Theil. II. Stük.

13. Von dem Extrahiren der Quadratwurzeln aus zusammengesezten Grössen.

Erklärung.

§. 124. Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Grösse extrahiren, heißt eine andere Grösse finden, welche mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Grösse wiedergiebt (§. 110.). Die gegebenen Grössen sind entweder einfach, oder zusammengesezt; allgemein durch Buchstaben, oder durch Zahlzeichen ausgedrükt.

Sind die gegebenen Grössen einfach und allgemein bezeichnet, so wird die Quadratwurzel vermittelst des vorgesezten Quadratwurzelzeichens angezeigt, wie in §. 109.

Sind aber die gegebenen Grössen durch Zahlzeichen ausgedrükt und bestehen nur aus einem oder höchstens zwei Zahlzeichen, so findet man die denselben zugehörigen rationalen Quadratwurzeln vermittelst der in §. 112. gegebenen Wurzeltafel, oder in Gedanken durch eine leichte Division, weil die Quadratzahlen durch die Multiplikation entstehen: folglich ist es nur nöthig, die durch Zahlen bezeichneten zusammengesezten Grössen aus mehr als zwei Zahlzeichen genauer zu entwikeln, um daraus die Regeln für das Extrahiren der Quadratwurzeln zu finden, die keine andern sein können, als die dem Potenziren entgegengesezten. Daher wird man bei Extrahiren dividiren, wo man beim Potenziren multiplicirte, und subtrahiren, wo man beim Potenziren addirte.

Zusaz.

Da nach §. 123. Zus. 4. die Potenzen der vieltheiligen auf Potenzen zweitheiliger Grössen gebracht werden können;

können: so kann man sich anstatt aller Regeln bei dem Extrahiren der Quadratwurzel der allgemeinen Formel für zweitheilige Grössen $a^2 + 2ab + b^2$ bedienen.

Lehrsäze.

§. 125. Die vollkommene Quadratzahl einer ieden rationalen Wurzel besteht wenigstens aus doppelt so vielen Zahlzeichen weniger Eins, als die Wurzel enthält: aber auch in keinem Falle aus mehr, als doppelt so vielen Zahlzeichen, als die Wurzel ausmachen.

Beweis.

Enthält die Wurzel 4 Zahlzeichen, so kann diese nicht kleiner als 1000, und nicht grösser als 9999 sein, weil keine Zahl mit 4 Zahlzeichen kleiner als 1000, aber auch nicht grösser als 9999 sein, ob sie gleich ieden innerhalb diesen Gränzen liegenden Werth haben kann. Nun aber ist $10000 > 9999$, also muß die Quadratzahl von 10000 $>$ sein, als die Quadratzahl von 9999 (§. 31. Anm.). Es ist das Quadrat von $10000 = 100000000$, und diese Zahl ist die kleinste unter allen die 9 Zahlzeichen enthalten, also kann das Quadrat von 9999 nur 8, d. i. $2 . 4$ oder doppelt so viel Zahlzeichen enthalten.

Da nun ferner das Quadrat von 1000, welches die kleinste Zahl unter denen ist, die 4 Zahlzeichen haben $=$ 1000000, also 7 Zahlzeichen, d. i. $2 . 4 - 1$ Zahlzeichen enthält, so folgt, daß diese Quadratzahl nur ein Zahlzeichen weniger als doppelt soviel, als die Wurzel enthalten könne.

Zusaz.

Zu einer leichten Uebersicht des vorigen Sazes kann folgende Tabelle dienen.

Das Quadrat	der			so aus		oder			
Quadrat	kleinsten	Zahl,	2	Zahlzeichen	besteht,	von	10	ist	100.
„	größten	„	„	„	„	„	99	„	9801.
„	kleinsten	„	3	„	„	„	100	„	10000.
„	größten	„	„	„	„	„	999	„	998001.
„	kleinsten	„	4	„	„	„	1000	„	1000000.
„	größten	„	„	„	„	„	9999	„	99980001.
„	kleinsten	„	5	„	„	„	10000	„	100000000.
„	größten	„	„	„	„	„	99999	„	9999800001.

Besteht also eine	Quadratzahl	aus	3	oder	4	Zahlzeichen,	so hat ihre	Wurzel	2	Zahlzeichen.
„	„	„	5	„	6	„ „	„	„	3	„ „
„	„	„	7	„	8	„ „	„	„	4	„ „
„	„	„	9	„	10	„ „	„	„	5	„ „ u.

§. 126. Wird die Quadratwurzel einer Zahl um Eins vermehrt, so wächst die Quadratzahl um die doppelte vorige Wurzel und Eins.

Beweis.

Es ist $(R + 1)^2 = R^2 + 2R + 1$: (§. 123.) weil nun R^2 die Quadratzahl von R ist, so wächst dies Quadrat um $2R + 1$ wenn R um Eins wächst.

Da nun $2R + 1$ allemal eine ungerade Zahl ist, so macht man die Quadrate aller ganzen Zahlen, wie sie nach der gewöhnlichen Ordnung auf einander folgen, wenn man die ungeraden Zahlen in dieser Ordnung zusammen addirt. So ist

$$
\begin{array}{lllll}
1^2 = 1 & & = \underbrace{1} & = & 1 \\
2^2 = 1 + 2 + 1 & & = 1 + 3 & = & 4 \\
3^2 = 4 + 4 + 1 & & = 4 + 5 & = & 9 \\
4^2 = 9 + 6 + 1 & & = 9 + 7 & = & 16 \\
5^2 = 16 + 8 + 1 & & = 16 + 9 & = & 25 \\
6^2 = 25 + 10 + 1 & & = 25 + 11 & = & 36 \\
7^2 = 36 + 12 + 1 & & = 36 + 13 & = & 49 \\
8^2 = 49 + 14 + 1 & & = 49 + 15 & = & 64 \\
9^2 = 64 + 16 + 1 & & = 64 + 17 & = & 81 \\
10^2 = 81 + 18 + 1 & & = 81 + 19 & = & 100
\end{array}
$$

u. s. w.

Wor-

Woraus man sieht, daß die Differenzen der Quadratzahlen um 2 wachsen.

Ist nun eine Zahl, wie z. B. 69, keine vollkommene Quadratzahl, und man subtrahirt davon dieienige unter den kleinern vollkommenen Quadratzahlen, die ihr am nächsten kommt, in diesem Falle $64 = 8^2$: so ist der Rest kleiner, als die doppelte Wurzel der subtrahirten Quadratzahl um Eins vermehrt, hier $69 - 64 < 2\sqrt{64} + 1$ oder < 17. Also ist die Wurzel der nächst kleinern vollkommenen Quadratzahl derienige rationale Theil der Wurzel aus der unvollkommenen Quadratzahl, welcher sich in ganzen Zahlen ausdrüken läßt. Weil $8^2 < 69$ und $9^2 > 69$ ist, so folgt, daß $\sqrt{69} = 8 +$ einem Bruch sei, der kleiner als 1 ist.

Anmerkung.

Daraus folgt, daß wenn man aus einer Quadratzahl die Wurzel extrahirt und ein Rest bleibt, so kann man die gefundene Wurzel für richtig annehmen, wenn es nicht auf die strengste Genauigkeit ankommt, wie dies der Fall bei den meisten hierher gehörigen Aufgaben ist, die dem Infanterieofficier in der Ausübung der Verschanzungswissenschaft ꝛc. vorkommen.

Aufgaben.

§. 127. Aus einer ganzen Zahl, die aus 3 oder 4 Zahlzeichen besteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflösung und Beweis.

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, und gebe jeder Klasse zwei Zahlzeichen. In der höchsten Klasse kann auch ein Zahlzeichen stehen, weil dieselbe aus der Wurzel 1, 2 oder 3 entstanden sein kann. So viel die gegebene Zahl Klassen hat, so viel einzelne Zahlzeichen enthält die dazu gehörige Wurzel (§. 125.). Es sei die Zahl $144 = 100 + 44$.

   1 | 44 |

In der höchsten Klasse heisse die Wurzel a, und in der folgenden b, so zeigt a Zehner, und b Einer an.

2. Da nun die Quadratwurzel von 100 = 10 oder welches einerlei von 1 = 1 ist, so seze man die Wurzel an die Stelle des Quotienten, wie bei der Division, und die ihr zugehörige Quadratzahl unter die Quadratzahl in der höchsten Klasse der gegebenen Zahl und subtrahire

1	44	10 = a
1	00	
	44	

3. In dem Reste ist also das doppelte Produkt der beiden Theile, und die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel noch enthalten. Um daraus den zweiten Theil der Wurzel durch die Division zu erhalten, mache man den Divisor, welcher in jedem Falle der doppelte Theil der schon gefundenen Wurzel ist, nämlich 2a = 20, seze denselben in eine Parenthese unter den Rest 44 und dividire, so erhält man den zweiten Theil der Wurzel.

1	44	10 = a
1	00	2 = b
	44	
	(20)	

4. Mit diesem gefundenen zweiten Theile multiplicire man den Divisor, so erhält man 2ab = 40, und seze dies Produkt unter den Divisor.

1	44	10 = a
1	00	2 = b
	44	
	(20)	
	40	

5. Nun fehlt noch die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel = b^2. Diese seze man unter die Einer des vori-

vorigen Produkts, addire die beiden zulezt erhaltenen Theile der Quadratzahl, und subtrahire diese Summe von dem gebliebenen Reste der gegebenen Zahl, addire zulezt die beiden Theile der Wurzel.

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad 1 \mid 44 \mid \quad 10 = a$$
$$a^2 = 1 \quad 00 \qquad 2 = b$$
$$2ab + b^2 = 44 \qquad 12 = a + b$$
$$(2a) = (20)$$
$$2ab = 40$$
$$b^2 = 4$$
$$2ab + b^2 = 44$$
$$0$$

Zusaz.

1. Man kann, ohne daß die Richtigkeit der Rechnung leidet, die Nullen im vorhergehenden Beispiele weglassen, weil dadurch das ganze Verfahren etwas abgekürzt wird. Dabei sind folgende Regeln zu merken.

Man rükt, nachdem der erste Theil der Wurzel gefunden ist, zu dem etwa gebliebenen Reste, im Fall die Zahl in der vorhergehenden Klasse keine vollkommene Quadratzahl ist, deren Wurzel aber doch allemal von der nächst kleinern Quadratzahl aus der im §. 112. gegebenen Wurzeltafel genommen werden kann, die folgende Klasse, und sezt den Divisor unter das höchste Zahlzeichen dieser Klasse, weil darin das doppelte Produkt der beiden Theile enthalten ist; wenn der Divisor aus mehr, als aus einem Zahlzeichen besteht, so erhalten die noch übrigen ihre Stellen zur Linken unter dem gebliebenen Reste. Den zweiten Theil der Wurzel kann man zur Rechten an den Divisor sezen, und beide zusammen mit dem zweiten Theile der Wurzel multipliciren: so erhält man das doppelte Produkt der beiden Theile in einander und die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel in einer Reihe,

wie folgende Beispiele lehren. Der Grund dieses Verfahrens liegt in der Natur der Quadratzahlen von zweitheiligen Wurzeln §. 123. Zus. 2.

$$\begin{array}{llr} & & a+b \\ a^2+2ab+b^2 & & 1|44|12 \\ & a^2 = 1 & \\ \hline 2ab+b^2 = & 44 & \\ (2a) = & (2)2 = b & \\ 2ab+b^2 = & 44 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{llr} & & a+b \\ & & 20|25|45 \\ & a^2 = 16 & \\ \hline 2ab+b^2 = & 425 & \\ (2a) = & (8)5 = b & \\ 2ab+b^2 = & 425 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

2. Besteht die gegebene ganze Zahl aus mehr als 3 oder 4 Zahlzeichen; so extrahire man, ohne auf die Anzahl der Klassen Rücksicht zu nehmen, die ersten beiden Theile der Wurzel. Sind diese gefunden, so nehme man dieselben nach §. 123. Zus. 4. als den ersten Theil an, rücke die folgende Klasse zu dem gebliebenen Reste, und mache den Divisor von den bis dahin gefundenen Theilen der Wurzel wie vorhin, und suche aufs neue den zweiten Theil der Wurzel.

$$\begin{array}{llr} & & \overset{a}{\overbrace{a+b}}+b \\ & & 45|42|76|674 \\ a^2 = & 36 & \\ \hline 2ab+b^2 = & 942 & \\ (2a) = & (12)7 & \\ 2ab+b^2 = & 889 & \\ \hline 2ab+b^2 = & 5376 & \\ (2a) = & (134)4 & \\ 2ab+b^2 = & 5376 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

oder nach §. 123. Zus. 4.

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \qquad\qquad a+b+c \\
 & & 45|42|76|\;674 \\
a^2 & = & 36 \\
\hline
2ab+b^2 & = & 942 \\
(2a) & = & (12)7 \\
2ab+b^2 & = & 889 \\
\hline
2(a+b)c+c^2 & = & 5376 \\
(2(a+b)) & = & (134)4 \\
2(a+b)c+c^2 & = & 5376 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

Ist die gegebene Zahl 1 mit einer geraden Anzahl Nullen, so ist die Wurzel 1 mit halb so viel Nullen, als die gegebene Zahl hat:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Z. B.} & 1|00|00|00|00\;|\;10000 \\
 & 1 \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}
$$

Daher hat man in diesem Falle nicht nöthig die Rechnung vorzunehmen.

3. Kommt der Fall vor, daß der Divisor grösser ist, als der gebliebene Rest + der dazu gesezten Klasse, so ist der neue Theil der Wurzel Null. Diese Null seze man in die Stelle der Wurzel, rüke aufs neue eine Klasse hinzu, mache den Divisor und verfahre übrigens wie vorhin.

Z. B. 12|26|68|05|76|35024

```
 9
 ---
 326
  (6)5
 325
 ----
   168
  (70)
 -----
   16805
    (700)2
   14004
   ------
    280176
     (7004)4
    280176
    -------
         0
```

4. Bleibt ein Rest, so muß derselbe kleiner sein, als die doppelte bis dahin gefundene Wurzel um Eins vermehrt. Ist der Rest grösser, so ist es ein Beweis, daß man den Theil der Wurzel, bei welchem dieser Rest bleibt, zu klein genommen habe. Verglichen mit §. 126.

Also dient der in §. 126. vorgetragene Saz dazu, die Richtigkeit der Wurzel zu untersuchen.

Im vorigen Beispiele ist der erste Rest 3, die doppelte Wurzel 3 um Eins vermehrt 7. Da nun $3 < 7$ so ist 3 die richtige Quadratwurzel der Zahl 12 so weit sie in ganzen Zahlen ausgedrükt werden kann.

5. Will man sich überzeugen, ob die ganze Rechnung richtig sei, so kann man die Probe auf folgende Art machen.

Man quadire die gefundene Wurzel und addire dazu den etwa übrig gebliebenen Rest, so muß die gegebene Zahl wieder gefunden werden.

Z. B.

Z. B. 2|8 5|4 6|168

```
  1
 ---
 1 8 5
  (2)6
 1 5 6
------
   2 9 4 6
    (3 2)8
   2 6 2 4
  --------
     3 2 2 Rest
```

Probe nach n. 4.

Der Rest ist 322. Die doppelte Wurzel + 1 = 2 (168) + 1 = 336 + 1. Da nun 322 < 336 + 1, so ist 168 die richtige Wurzel.

Diese Probe sichert nicht, wie der Augenschein lehrt, ob sich nicht irgendwo ein kleiner Rechnungsfehler eingeschlichen habe, daher kann man auch die Probe nach n. 5. machen.

```
Die Wurzel ist = 168
                 168
                -----
                1344
               1008
               168
              ------
               28224
                 322 Rest
               ------
               28546
```

Da nun die Zahl 28546 mit der gegebenen völlig übereinkommt, so weis man mit Gewisheit, daß man bei der Rechnung nicht gefehlt habe.

§. 128. Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Auf-

Auflösung.

1. Man extrahire so wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner des gegebenen Bruchs die Quadratwurzel: so giebt die erstere den Zähler, die leztere aber den Nenner der verlangten Wurzel (§. 110. 1. Zus.).

So ist z. B. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ 2c.

2. Ist der Nenner des gegebenen Bruchs eine unvollkommene Quadratzahl, so multiplicire man Zähler und Nenner desselben mit diesem Nenner, und extrahire aus beiden die Quadratwurzel.

So ist z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$ 2c.

1. Zusaz.

Ist der gegebene Bruch ein Decimalbruch, so extrahirt man die Quadratwurzel

1. wenn die Anzahl der Decimalstellen gerade ist, wie aus einer ganzen Zahl, aus dem Zähler, und giebt der erhaltnen Quadratwurzel halb so viele Decimalstellen, als dieser Zähler hat. Z. B. $\sqrt{0,454276} = 0,674$. Denn es ist $\sqrt{0,454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0,674$; ferner $\sqrt{0,0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0,12$.

2. Wenn die Anzahl der Decimalstellen ungerade ist, ebenfalls wie aus einer ganzen Zahl, nachdem man rechter Hand durch Beifügung einer Null die Anzahl der Decimalstellen gerade gemacht hat, welches den Werth des Bruchs nicht ändert (§. 72. 2. Zus.). Z. B. $\sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280}$

$\sqrt{0,8280} = \frac{\sqrt{8280}}{\sqrt{10000}} = \frac{90}{100} = 0,9 +$ einem Theile $< \frac{1}{10}$.

2. Zusaz.

Gemeine Brüche, besonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Quadratzahlen sind, verwandelt man gewöhnlich in Decimalbrüche und extrahirt aus denselben die Quadratwurzel nach Zus. 1.

Z. B. $\frac{1}{3} = 0,333333 \ldots$ §. 75. Zus.

```
0,|3 3|3 3|3 3|0,577 ....
  2 5
  ---
    8 3 3
   (1 0)7
    7 4 9
   ------
      8 4 3 3
     (1 1 4)7
      8 0 2 9
     --------
        4 0 4
```

3. Zusaz.

Ist die gegebene Zahl mit einem ächten gemeinen Bruche verbunden, also eine gemischte Zahl, so verwandelt man sie nach §. 66. Zus. 2. in einen unächten Bruch und extrahirt die Quadratwurzel nach den im §. gegebenen Regeln, oder verwandelt sie in einen Decimalbruch nach §. 75., und extrahirt die Quadratwurzel nach Zus. 1. Z. B. $\sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{5}{8}$; $\sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$. Ferner $\sqrt{2\frac{1}{3}} = \sqrt{2,3 \ldots} = \sqrt{2,30 \ldots} = 1,5 \ldots$ Eben so verfährt man mit ursprünglichen Decimalbrüchen z. B. $\sqrt{4,25} = 2,5$; $\sqrt{3,4} = \sqrt{3,40} = 1,8 \ldots$

§. 129.

§. 129. Aus einer unvollkommenen Quadratzahl, die Wurzel durch Annäherung so genau zu finden, als verlangt wird.

Auflösung.

1. Man füge der gegebenen Zahl z. B. 2, eine beliebige, aber gerade Anzahl Nullen bei und seze zwischen diese Nullen und die gegebene Zahl ein Comma, so ist die ganze Zahl in einen Decimalbruch verwandelt, dessen Werth mit der gegebenen Zahl einerlei ist.

2. Nun extrahire man nach §. 127. die Quadratwurzel, wie aus einer ganzen Zahl, und schneide von derselben von der Rechten gegen die Linke halb so viel Decimalstellen, als der gegebenen Zahl Nullen beigefügt sind: so enthält die Quadratwurzel ausser den Ganzen noch Zehntheile, Hunderttheile, Tausendtheile ꝛc.

3. Ist die Anzahl der zu findenden Decimalstellen in der Quadratwurzel vorgeschrieben, so darf man nur der gegebenen Zahl doppelt so viel Nullen beifügen.

4. Auch kann man während dem Extrahiren die Nullen paarweise dem Reste beifügen, und die ganze Zahl in der Wurzel bemerken, wenn man das erste Paar Nullen zusezt.

5. Da nun dieses Verfahren ohne Ende fortgesezt werden kann, ohne daß die Wurzel vollkommen genau gefunden wird, weil das lezte Zahlzeichen der gegebenen Zahl, durch die beigefügten Nullen, allemal Null ist und sich keine Quadratzahl von den einfachen Wurzeln von 1 bis 9 auf Null endigt, welches doch der Fall sein müßte, wenn kein Rest bleiben soll: so folgt daraus, daß man dem wahren Werthe der Quadrat-

wurzel

wurzel immer näher kommt, ia so nahe kommen kann, als man verlangt *).

Beispiele.

2|00|00|00|00|00 | 1,4142 ...		2 | 1,4142 ...
1		1
100		100
(2)4		(2)4
96		96
400		400
(28)1	oder	(28)1
11900		11900
(282)4		(282)4
11296		11296
60400		60400
(2828)2		(2828)2
56564		56564
3836		3836

Weil die Fälle oft vorkommen, daß man die Wurzeln aus unvollkommenen Quadratzahlen nöthig hat, so kann man sich folgender kleinen Tafel bedienen, in welcher die Quadratwurzeln aus beistehenden Zahlen bis auf die 7te Decimalstelle enthalten sind.

$\sqrt{2} = 1,4142135 \ldots$	$\sqrt{11} = 3,3166248 \ldots$
$\sqrt{3} = 1,7320507 \ldots$	$\sqrt{13} = 3,6055513 \ldots$
$\sqrt{5} = 2,2360679 \ldots$	$\sqrt{14} = 3,7416574 \ldots$
$\sqrt{6} = 2,4494897 \ldots$	$\sqrt{15} = 3,8729833 \ldots$
$\sqrt{7} = 2,6457513 \ldots$	$\sqrt{17} = 4,1231056 \ldots$
$\sqrt{10} = 3,1622776 \ldots$	$\sqrt{19} = 4,3588989 \ldots$ ꝛc.

Eben

*) In den mehresten Fällen kann man die Rechnung endigen, wenn man die Wurzel bis auf Millionentheile extrahirt hat. Auch muß man

Eben so kommen die Quadratwurzeln folgender Brüche bisweilen vor, die man vermittelst der vorhergehenden Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen leicht finden kann.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071067, \text{ d. i. } 1{,}4142135 : 2;$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773502, \text{ d. i. } 1{,}7320507 : 3;$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}8164966;$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}4472136;$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 0{,}6324555 \text{ ꝛc.}$$

§. 130. Aus einer gegebenen Zahl, mit Hülfe der berechneten Quadrattafeln, die Quadratwurzel zu finden *).

Auflösung.

Hat man die gegebene Zahl in ihre Klassen eingetheilt, so suche man in den Quadrattafeln, welche der Arith-

man auf die Maasse vorzüglich Rüksicht nehmen, zu welchen die gegebenen Zahlen gehören, weil bei der Anwendung dieser Theorien keine Zahlen in abstrakto vorkommen. Wenn der Infanterieofficier Schritte zu seinem Maasse gewählt hat, so fallen die Decimaltheile in der Ausübung von selbst weg, ob sie gleich für die Theorie nothwendig sind.

*) Einige besondere Bemerkungen werden in der Taktik bei der Lehre von dem Quarree vorkommen, weil die Berechnung desselben ebenfalls das Extrahiren der Quadratwurzel aus einer Zahl erfordert, die man aber vorher nach andern Regeln zubereiten muß. Auch dazu werden dem Officier schon berechnete Quadrattafeln nüzlich sein.

Arithmetik beigefügt sind, eine Quadratzahl, welche eben so groß, oder allen, oder den ersten Klassen der gegebenen Zahl am nächsten kommt, und subtrahire solche davon. Die dazu gehörige und in den Quadrattafeln befindliche Wurzel seze man an die Stelle der Wurzel, und sehe sie als den ersten Theil an. Mit den noch übrigen Klassen verfahre man nach den in §. 127. im Zusaz gegebenen Regeln. So ist z. B. in den Tafeln die Quadratwurzel von 144 = 12; hingegen zu der Zahl 703945 findet man in den Tafeln die nächst kleinere Quadratzahl 703921 und die dazu gehörige Wurzel 839. Zu der Zahl aber 3894862578 findet man in den Tafeln nur für die ersten drei Klassen die nächst kleinere Quadratzahl 389376, und die dazu gehörige Wurzel 624. Damit macht man folgenden Gebrauch

```
        38|94|86|25|78 | 62408 . . .
        389376           |__|
        ------             a
            11025        |___|
(2a) = (1248)              a
       ---------
            1102578
(2a) =     (12480)8
             998464
       --------------
             104114
```

Also fällt die Quadratwurzel der Zahl 3894862578 zwischen die Zahlen 62408 und 62409.

14. Von dem Extrahiren der Kubikwurzeln aus zusammengesezten Grössen.

Erklärung.

§. 131. Die Kubikwurzel aus einer gegebenen Grösse extrahiren, heißt eine andere Grösse finden,

welche mit ihrem Quadrate multiplicirt, die gegebene Grösse wiedergiebt (§. 110.).

Zusaz.

In der in §. 112. gegebenen Tafel sind die Kubikwurzeln für dieienigen vollkommenen Kubikzahlen enthalten, die nicht mehr als drei Zahlzeichen haben.

Anmerkung.

Da das Extrahiren der Kubikwurzeln alle Aehnlichkeit mit dem Extrahiren der Quadratwurzeln hat, so gelten auch hier die in §. 124. angeführten Bemerkungen, nur mit der gehörigen Erweiterung auf die gegebenen Begriffe und angeführten Eigenschaften der Kubikzahlen, §. 123.

Lehrsäze.

§. 132. Die vollkommene Kubikzahl einer ieden rationalen Wurzel bestehet wenigstens aus dreimal so vielen Zahlzeichen weniger zwei, als die Wurzel enthält: aber auch in keinem Falle aus mehr, als dreimal so vielen Zahlzeichen, als die Wurzel ausmachen.

Beweis.

Enthält die Wurzel 2 Zahlzeichen, so kann dieselbe nicht kleiner als 10, und nicht grösser als 99 sein, ob sie gleich ieden innerhalb diesen Gränzen liegenden Werth haben kann. Nun aber ist $100 > 99$, also muß die Kubikzahl von $100 >$ sein, als die Kubikzahl von 99 (§. 31.). Es ist die Kubikzahl von $100 = 1000000$, und diese Zahl ist die kleinste unter allen, die 7 Zahlzeichen enthalten, also kann die Kubikzahl von 99 nur 6, d. i. $3 . 2$ oder dreimal so viel Zahlzeichen enthalten.

Da nun ferner die Kubikzahl von 10, welches die kleinste Zahl unter denen ist, die 2 Zahlzeichen haben $= 1000$, also 4 Zahlzeichen, d. i. $3 . 2 - 2$ Zahlzeichen

chen enthält, so folgt, daß diese Kubikzahl nur zwei Zahlzeichen weniger als dreimal so viel enthalten kann, als die Wurzel enthält.

Zusaz.

Folgende Tabelle dient zu einer leichten Uebersicht des vorigen Sazes.

Die Kubikzahl	der			so aus		oder			
Kubikzahl	kleinsten	Zahl,	2	Zahlzeichen	besteht,	von	10	ist	1000.
,,	größten	,,	,,	,,	,,	,,	99	,,	970299.
,,	kleinsten	,,	3	,,	,,	,,	100	,,	1000000.
,,	größten	,,	,,	,,	,,	,,	999	,,	997002999.
,,	kleinsten	,,	4	,,	,,	,,	1000	,,	1000000000.
,,	größten	,,	,,	,,	,,	,,	9999	,,	999700029999.
,,	kleinsten	,,	5	,,	,,	,,	10000	,,	1000000000000.
,,	größten	,,	,,	,,	,,	,,	99999	,,	999970000299999.

Besteht also eine Kubikzahl aus				so hat ihre Wurzel		
eine Kubikzahl aus	4	oder	6	Zahlzeichen, ihre Wurzel	2	Zahlzeichen.
,, ,, ,, ,,	7	,,	9	,, ,, ,, ,,	3	,, ,,
,, ,, ,, ,,	10	,,	12	,, ,, ,, ,,	4	,, ,,
,, ,, ,, ,,	13	,,	15	,, ,, ,, ,,	5	,, ,, ꝛc.

§. 133. **Wird die Kubikwurzel einer Zahl um Eins vermehrt, so wächst die Kubikzahl um die dreifache Summe der vorigen Wurzel und ihrer Quadratzahl, und überdem noch um Eins.**

Beweis.

Es ist $(R+1)^3 = R^3 + 3R^2 + 3R + 1$ (§. 123.). Weil nun R^3 die Kubikzahl von R ist, so wächst diese Kubikzahl um $3(R+R^2)+1$, wenn R um Eins wächst.

Zusaz.

Nach diesem Geseze wachsen die Kubikzahlen aller ganzen Zahlen in der natürlichen Ordnung auf folgende Art:

 $1^3 = 1$

$$
\begin{array}{rcrcl}
1^3 = 1 & & = & \underbrace{1} & = 1 \\
2^3 = 1 + 3(1 + 1) + 1 & = & 1 + 7 & = & 8 \\
3^3 = 8 + 3(2 + 4) + 1 & = & 8 + 19 & = & 27 \\
4^3 = 27 + 3(3 + 9) + 1 & = & 27 + 37 & = & 64 \\
5^3 = 64 + 3(4 + 16) + 1 & = & 64 + 61 & = & 125 \\
6^3 = 125 + 3(5 + 25) + 1 & = & 125 + 91 & = & 216 \\
7^3 = 216 + 3(6 + 36) + 1 & = & 216 + 127 & = & 343 \\
8^3 = 343 + 3(7 + 49) + 1 & = & 343 + 169 & = & 512 \\
9^3 = 512 + 3(8 + 64) + 1 & = & 512 + 217 & = & 729 \\
10^3 = 729 + 3(9 + 81) + 1 & = & 729 + 271 & = & 1000
\end{array}
$$

Hieraus sieht man, daß die Differenzen der Kubikzahlen um ein Produkt von 6 in die Zahl wachsen, welche angiebt, die wie vielste Differenz es nach der ersten ist.

Ist nun eine Zahl, wie z. B. 526, keine vollkommene Kubikzahl, und man subtrahirt davon dieienige unter den kleinern vollkommenen Kubikzahlen, die ihr am nächsten kommt, in diesem Falle $512 = 8^3$; so ist der Rest kleiner als die dreifache Summe der Kubikwurzel von der subtrahirten Kubikzahl und des Quadrats dieser Wurzel um Eins vermehrt. Hier ist $526 - 512 < 3(\sqrt[3]{512} + (\sqrt[3]{512})^2) + 1$, oder $526 - 512 = 14 < 217$. Also ist die Wurzel der nächst kleinern vollkommenen Kubikzahl derienige rationale Theil der Wurzel aus der unvollkommenen Kubikzahl, welcher sich in ganzen Zahlen ausdrüken läßt. Weil $8^3 < 526$, und $9^3 > 526$ ist, so folgt, daß $\sqrt[3]{526} = 8 +$ einen Bruch sei, der kleiner als 1 ist.

Anmerkung.

Auch hier gilt das, was in §. 126. in der Anmerkung erinnert worden.

Aufgaben.

§. 134. Aus einer ganzen Zahl, die aus 4 bis 6 Zahlzeichen besteht, die Kubikwurzel zu finden.

Auf=

Auflösung und Beweis.

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, und gebe ieder Klasse drei Zahlzeichen. In der höchsten Klasse kann auch ein, oder zwei Zahlzeichen stehen, weil diese Zahl aus der Wurzel 1, 2, 3, oder 4 entstanden sein kann. So viel die gegebene Zahl Klassen hat, so viel einzelne Zahlzeichen enthält die dazu gehörige Wurzel (§. 132.). Es sei die Zahl $1728 = 1000 + 728$.

$$1 \mid 728 \mid$$

In der höchsten Klasse heisse die Wurzel a, und in der folgenden b, so zeigt a Zehner und b Einer an.

2. Da nun die Kubikwurzel von $1000 = 10$, oder welches einerlei, von $1 = 1$ ist, so seze man die Wurzel an die Stelle des Quotienten, wie bei der Division, und die ihr zugehörige Kubikzahl unter die Kubikzahl in der höchsten Klasse der gegebenen Zahl und subtrahire.

$$\begin{array}{l} 1 \mid 728 \mid 10 = a \\ \underline{1 \;\; 000} \\ \quad\;\; 728 \end{array}$$

3. In dem Reste ist also das dreifache Produkt der Quadratzahl des ersten Theils in den zweiten, und das dreifache Produkt des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils, nebst der Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel enthalten. Um daraus den zweiten Theil der Wurzel durch die Division zu erhalten, mache man den Divisor, welcher in iedem Falle die dreifache Quadratzahl der schon gefundenen Wurzel ist, nämlich $3a^2 = 3 \cdot 10^2 = 300$, seze denselben in eine Parenthese unter den Rest 728 und dividire, so erhält man den zweiten Theil der Wurzel.

$$\begin{array}{r|l} 1|728 & 10 = a \\ 1\ 000 & 2 = b \\ \hline 728 & \\ (300) & \end{array}$$

4. Mit diesem gefundnen zweiten Theile multiplicire man den Divisor, so erhält man $3a^2b = 600$, und seze dies Produkt unter den Divisor. Ferner suche man das dreifache Produkt des ersten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel, nämlich $3ab^2 = 3(10 \cdot 2^2) = 120$ und seze es unter das vorige. Endlich suche man die Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel oder $b^3 = 2^3 = 8$ und seze dieselbe unter die Einer des vorigen Produkts.

5. Nun addire man die in n. 4. gefundenen drei Stüke, und subtrahire die Summe von dem gebliebenen Reste der gegebenen Zahl, und addire die beiden Theile der Wurzel.

$$\begin{array}{rr|l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & 1|728 & 10 = a \\ a^3 & 1.000 & 2 = b \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 728 & 12 = a + b \\ (3a^2) = & (300) & \\ 3a^2b = & 600 & \\ 3ab^2 = & 120 & \\ b^3 = & 8 & \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 728 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Zusaz.

1. Man kann im vorigen Beispiele die Nullen weglassen, welches die Rechnung verkürzt und sich folgende Regeln merken:

Man rükt, nachdem der erste Theil der Wurzel gefunden ist, zu dem etwa gebliebenen Reste, im Fall die Zahl

Zahl in der vorhergehenden Klasse keine vollkommne Kubikzahl ist, deren Wurzel aber doch allemal von der nächst kleinern Kubikzahl, aus der in §. 112. gegebenen Wurzeltafel genommen werden kann, die folgende Klasse, und sezt den Divisor unter das höchste Zahlzeichen derselben, weil darin das dreifache Produkt der Quadratzahl des ersten Theils in den zweiten Theil der Wurzel enthalten ist; und wenn der Divisor aus mehr, als aus einem Zahlzeichen besteht, so erhalten die noch übrigen ihre Stelle zur Linken unter dem gebliebenen Reste. Das Produkt $3a^2b$ kommt so zu stehen, daß das niedrigste Zahlzeichen unter das niedrigste des Divisors trift, und die übrigen zur Linken, wie bei dem Divisor. Ferner das niedrigste Zahlzeichen des Produkts $3ab^2$ sezt man unter die mittlere Zahl der heruntergerükten Klasse und die übrigen links. Endlich die Kubikzahl von dem zweiten Theile der Wurzel kommt unter die Einer oder das niedrigste Zahlzeichen der heruntergerükten Klasse zu stehen. Besteht die Kubikzahl selbst aus mehrern Zahlzeichen, so sezt man die noch übrigen links unter, wie im folgenden Beispiele. Den Grund dieses Untersezens findet man in der Natur der Kubikzahlen von zweitheiligen Wurzeln §. 123. Zus. 2.

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & a+b \\
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 1 \mid 728 & \mid 12 \\
a^3 & = & 1 & \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 728 & \\
(3a^2) & = & (3) & \\
3a^2b & = & 6 & \\
3ab^2 & = & 12 & \\
b^3 & = & 8 & \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 728 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$a + b$

46|785 | 36

$a^3 = 27$

19785

$(3a^2) = (27)$

$3a^2b = 162$

$3ab^2 = 324$

$b^3 = 216$

19656

129 Rest

2. Besteht die gegebene Zahl aus mehr als 4 bis 6 Zahlzeichen: so extrahire man, ohne auf die Anzahl der Klassen Rüksicht zu nehmen, die ersten beiden Theile der Wurzel.

Sind diese gefunden, so nehme man dieselbe nach §. 123. Zus. 4. als den ersten Theil an, rüke die folgende Klasse zu dem etwa gebliebenen Reste und mache den Divisor von den bis dahin gefundenen Theilen der Wurzel wie vorhin, und suche aufs neue den zweiten Theil der Wurzel.

$a + b + b$

432|081|216 | 756 (unter 75: a)

$a^3 = 343$

89081

$(3a^2) = (147)$

$3a^2b = 735$

$3ab^2 = 525$

$b^3 = 125$

78875

10206216

$(3a^2) = (16875)$

$3a^2b = 101250$

$3ab^2 = 8100$

$b^3 = 216$

10206216

0

Oder

Oder

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad\quad a+b+c \\
 & 432|081|216 \mid 7\;\;5\;\;5 \\
a^3 = & 343 \\
\hline
 & \;\;89081 \\
(3a^2) = & (147) \\
3a^2b = & 735 \\
3ab^2 = & \;\;525 \\
b^3 = & \;\;\;125 \\
\hline
 & \;\;78875 \\
\hline
 & \;\;10206216 \\
(3(a+b)^2) = & \;\;(16875 \\
3(a+b)^2c = & 101250 \\
3(a+b)c^2 = & \qquad 8100 \\
c^3 = & \qquad\;\; 216 \\
\hline
 & \;\;10206216 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

Ist die gegebene Zahl 1, mit einer durch drei theilbaren Anzahl Nullen, so ist die Wurzel 1 mit dem dritten Theil der Anzahl der Nullen, welche die gegebene Zahl hat.

Z. B.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 000 \mid 000 \mid 000 \mid 1000 \\
1 & \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}
$$

Daher hat man in diesem Falle nicht nöthig die Rechnung vorzunehmen.

3. Kommt der Fall vor, daß der Divisor grösser ist, als der Rest + der dazu gesezten Klasse; so ist der neue Theil der Wurzel Null. Diese Null seze man an die Stelle der Wurzel, rüke aufs neue eine Klasse hinzu, mache den Divisor und verfahre übrigens wie vorhin.

```
13|824|000|642|2400
 8
 ----
 5824
 (12)
 48
  96
   64
 ------
 5824
 ----------------
       000642
    (172800)
 ----------------
          642 Rest
```

4. Bleibt ein Rest, so muß derselbe kleiner sein, als die dreifache Summe der bis dahin gefundenen Wurzel und ihre Quadratzahl, wenn noch Eins dazu addirt wird. Also kann man eben so wie bei dem Extrahiren der Quadratwurzeln, die Richtigkeit der Kubikwurzel untersuchen. Im vorigen Beispiele war der erste Rest 5, und $3(2 + 2)^2 + 1 = 19$. Da nun $5 < 19$, so weis man, daß 2 die richtige Kubikwurzel der Zahl 13 ist, so weit sie nämlich in ganzen Zahlen ausgedrükt werden kann.

5. Will man sich überzeugen, daß auch kein Rechnungsfehler vorgefallen sei, so mache man die Probe auf folgende Art. Man kubire die gefundene Wurzel und addire dazu den etwa zulezt gebliebenen Rest, so muß die gegebene Zahl wieder gefunden werden.

```
Z. B.   3|690|15
         1
        -------
         2690
         (3)
         15
          75
          125
        -------
         2375
        -------
          315  Rest
```

Probe.

Probe.

Die Wurzel ist = 15

```
       15
       15
       --
       75
      15
      ---
      225
       15
     ----
     1125
     225
     ----
     3375
      315 Rest
     ----
     3690 welche mit der gegebenen
                   einerlei ist.
```

§. 135. Aus einem gegebenen Bruche die Kubikwurzel zu finden.

Auflösung.

1. Man extrahire so wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner des gegebenen Bruchs die Kubikwurzel: so giebt die erstere den Zähler, die leztere aber den Nenner der verlangten Wurzel (§. 110. 1. Zus.).

So ist z. B. $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$ rc.

2. Ist der Nenner des gegebenen Bruchs eine unvollkommene Kubikzahl, so multiplicire man Zähler und Nenner desselben mit der Quadratzahl dieses Nenners: so erhält man die Kubikwurzel aus dem Nenner vollkommen genau.

So ist z. B. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$ rc.

1. Zu-

1. Zusaz.

Ist der gegebene Bruch ein Decimalbruch, so extrahirt man die Kubikwurzel

1. Wenn die Anzahl der Decimalstellen durch 3 theilbar ist, wie aus einer ganzen Zahl aus dem Zähler, und giebt der erhaltenen Kubikwurzel nur den dritten Theil Decimalstellen, welche dieser Zähler hat. Z. B. $\sqrt[3]{0{,}216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$; eben so $\sqrt[3]{0{,}001728}$ $= \sqrt[3]{\frac{1728}{1000000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$ ꝛc.

2. Wenn die Anzahl der Decimalstellen durch 3 nicht theilbar ist, so sezt man zur Rechten so viele Nullen an, daß die ganze Anzahl durch 3 theilbar wird, weil dies den Werth des Bruchs nicht ändert, und extrahirt alsdenn wie aus einer ganzen Zahl. Z. B. $\sqrt[3]{0{,}5021} =$ $\sqrt[3]{0{,}502100} = \sqrt[3]{\frac{502100}{1000000}} = \frac{78}{100} = 0{,}78\ldots.$ So ist auch $\sqrt[3]{0{,}5121} = \sqrt[3]{0{,}512100} = \sqrt[3]{\frac{512100}{1000000}}$ $= \frac{80}{100} = 0{,}8\ldots.$

2. Zusaz.

Gemeine Brüche, besonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Kubikzahlen sind, verwandelt man am vortheilhaftesten in Decimalbrüche und extrahirt die Kubikwurzel nach Zus. 1.

Z. B. $\frac{2}{3} = 0,666666.....$ §. 75. Zus.

```
0,| 666|666|0,87....
  512
  -----
   154666
    (192)
   1344
    1176
      343
  --------
   146503
  --------
     8163
```

3. Zusatz.

Ist die gegebene Zahl eine gemischte Zahl, so verwandelt man sie in einen unächten Bruch, und extrahirt die Kubikwurzel. Z. B. $\sqrt[3]{18\frac{26}{27}} = \sqrt[3]{\frac{512}{27}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Eben so verfährt man mit ursprünglichen Decimalbrüchen. Z. B. $\sqrt[3]{64,421875} = 4,75$; ferner $\sqrt[3]{10,3954} = \sqrt[3]{10,395400} = \frac{202}{100} = 2,02$.

§. 136. Aus einer unvollkommenen Kubikzahl die Wurzel durch Annäherung so genau zu finden, als verlangt wird.

Auflösung.

1. Man füge der gegebenen Zahl, z. B. 3, eine beliebige, aber durch 3 theilbare Anzahl Nullen bei, und seze zwischen diese und die gegebene Zahl ein Komma, so ist die ganze Zahl in einen Decimalbruch verwandelt, dessen Werth mit der gegebenen Zahl einerlei ist.
2. Nun extrahire man nach §. 134. die Kubikwurzel wie aus einer ganzen Zahl, nur daß die Wurzel den dritten Theil Decimalstellen erhält, als der gegebenen Zahl beigefügt sind.

3. Ist

3. Ist die Anzahl der zu findenden Decimalstellen in der Kubikwurzel vorgeschrieben, so darf man nur der gegebenen Zahl 3mal so viele Nullen beifügen.

4. Auch kann man während dem Extrahiren die Nullen klassenweise dem Reste beifügen, und die ganze Zahl in der Wurzel bemerken, wenn man die erste Klasse Nullen zusezt.

5. Nach diesem Verfahren kann man das Extrahiren der Wurzel ohne Ende fortsezen. Auch hier gelten die Bemerkungen in §. 129. n. 5. nach den nöthigen Abänderungen für Kubikwurzeln.

Beispiele.

```
3|000|000|000|1,442 ...
1
--
2000
 (3)
12
 48
  64
------
1744
---
 256000
  (588)
 2352
   672
     64
 ------
 241984
 ------
   14016000
   (62208)
```

```
3 | 1,44 ...
1
--
2000
 (3)
12
 48
  64
-----
1744
-----
 256000
  (588)
```

Hier kann man sich ebenfalls die Kubikwurzeln aus mehreren unvollkommenen Kubikzahlen berechnen und in eine Tabelle bringen, wie die Quadratwurzeln §. 129.

z. B.

Z. B. $\sqrt[3]{2} = 1{,}259921 \ldots\ldots$
$\sqrt[3]{3} = 1{,}442249 \ldots\ldots$ ꝛc.

Ist dies geschehen, so findet man auch die Kubikwurzeln folgender Brüche durch eine leichte Division.

Z. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$ ꝛc.

§. 137. Aus einer gegebenen Zahl, mit Hülfe der berechneten Kubiktafeln, die Kubikwurzel zu finden.

Auflösung.

Hat man die gegebene Zahl gehörig in Klassen getheilt, so suche man in den Kubiktafeln, welche der Arithmetik beigefügt sind, eine Kubikzahl, welche eben so groß, oder allen, oder den ersten Klassen der gegebenen Zahl am nächsten kommt, und subtrahire solche davon. Die dazu gehörige und in den Kubiktafeln befindliche Wurzel seze man an die Stelle der Wurzel, und sehe sie als den ersten Theil an. Mit den noch übrigen Klassen verfahre man nach den in §. 134. im Zusaz gegebenen Regeln. So ist z. B. in den Tafeln die Kubikwurzel von 1728 = 12; hingegen zu der Zahl 584277151 findet man in den Tafeln die nächst kleinere Kubikzahl 584277056 und die dazu gehörige Wurzel 836.

Zu der Zahl aber 242970721674 findet man in den Tafeln nur für die ersten drei Klassen die nächst kleinere Kubikzahl 242970624 und die dazu gehörige Wurzel 624. Den Gebrauch findet man in folgendem Beispiele:

```
2 4 2|9 7 0|7 2 1|6 7 4 | 6 2 4 0 . . . .
2 4 2 9 7 0 6 2 4         └─────┘
─────────────────            a
            9 7 6 7 4
      (1 6 7 0 8 8)
```

Also fällt die Kubikwurzel der Zahl 242970721674 zwischen die Zahlen 6240 und 6241.

15. Allgemeines Extrahiren.

Aufgabe.

§. 138. Die Quadrat- oder Kubikwurzel aus einem allgemeinen Ausdruke zu finden.

Auflösung.

1. Die Quadratwurzel aus einer zusammengesezten Grösse extrahirt man nach der Formel §. 123. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, also finden hier die im Vorhergehenden gegebenen Regeln für das Extrahiren einer Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl, ihre allgemeine Anwendung.
2. Die Kubikwurzel aus einer zusammengesezten Grösse extrahirt man nach der Formel §. 123. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, daher finden auch hier die Regeln für das Extrahiren einer Kubikwurzel aus einer gegebenen Zahl, ihre allgemeine Anwendung.

Beispiele.

1. $\sqrt{a^2+2ab+b^2} \mid a+b$ $\qquad 16a^2+24ab+9b^2 \mid 4a+3b$

$$\begin{array}{l} a^2 \\ \hline 0+2ab+b^2 \\ (2a) \\ +2ab+b^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{auch} \quad \begin{array}{l} 16a^2 \\ \hline 0+24ab+9b^2 \\ (8a) \\ +24ab+9b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Eben so

$$\begin{array}{l} a^2 - 6ab + ac + 9b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + 3bc \mid a - 3b + \tfrac{1}{2}c \\ -a^2 \\ \hline 0 - 6ab + ac + 9b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + 3bc \\ (2a) \\ +6ab \qquad -9b^2 \\ \hline 0 + ac \quad 0 + \tfrac{1}{4}c^2 + 3bc \\ (2a-6b) - ac \quad -\tfrac{1}{4}c^2 - 3bc \\ \hline 0 \end{array}$$

2. $\sqrt[3]{a^3}$

2. $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \mid a + b$

$$\begin{array}{l} a^3 \\ \hline 0 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (3a^2) \\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

auch

$$\begin{array}{l} 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 \mid 2a + b \\ 8a^3 \\ \hline 0 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 \\ (12a^2) \\ 12a^2b + 6ab^2 + b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3 \mid \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{27}a^3 \\ \hline 0 - \frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3 \\ (\frac{1}{3}a^2) \\ + \frac{1}{6}a^2b - \frac{1}{4}ab^2 + \frac{1}{8}b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

1. Zusaz.

Auf eben die Art kann man die Biquadratwurzel, und wenn es nöthig wäre, alle folgende Wurzeln, aus allgemeinen Ausdrüken extrahiren *).

Z. B. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \mid a + b$

$$\begin{array}{l} a^4 \\ \hline 0 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (4a^3) \\ 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

*) Auch um aus Zahlen die Biquadratwurzel zu extrahiren, bedient man sich dieser Formel.

2. Zusaz.

Auch kann man, um aus einem allgemeinen Ausdruke, wie §. 123. Zus. 9. die Wurzel zu extrahiren, iene dort angezeigten Formeln brauchen. Eben so könnte man sich dieser Formeln bei der Extraktion der Wurzeln aus gegebenen Zahlen bedienen, wenn das Verfahren dadurch abgekürzt würde.

II.

Von den allgemein ausgedrükten Verhältnissen und Proportionen.

1. Von den Verhältnissen.

Erklärung.

§. 139. Zwei Grössen sind überhaupt in einem **Verhältnisse**, in so fern die eine aus der andern entstehen kann; insbesondere in einem **arithmetischen Verhältnisse**, in so fern die eine aus der andern durch Addition oder Subtraktion einer dritten Grösse, und in einem **geometrischen Verhältnisse**

Z. B. $2|0736|12$ ($a + b$)

$a^4 = 1$

10736

$(4a^3) = (4)$

$4a^3b = 8$

$6a^2b^2 = 24$

$4ab^3 = 32$

$b^4 = 16$

10736

0

Da dieser Fall äusserst selten und nur bei Rechnungsvortheilen vorkommt, so hat man nicht nöthig, sich dabei aufzuhalten. Auch kann

nisse, in so fern die eine aus der andern durch Multiplikation oder Division entstehet. Beide Grössen werden, wie bei den besondern Zahlenverhältnissen, Glieder des Verhältnisses genannt. Der Verhältnisname heißt auch hier bei dem arithmetischen Verhältnisse die Differenz, und bei dem geometrischen Verhältnisse der Exponent der beiden Glieder, der eine ganze Zahl, aber auch ein Bruch sein kann. Uebrigens kann man die in §. 82. und in den Zusäzen gegebenen Erklärungen und andern Bemerkungen für die Zahlenverhältnisse hier in ihrer Allgemeinheit anwenden.

1. Zusaz.

Sezt man auf eine allgemeine Art, das erste Glied eines arithmetischen Verhältnisses = a, die Differenz = d, so ist a — (a + d) das zweite Glied, und zugleich ein allgemeiner Ausdruk eines zunehmenden Verhältnisses und (a + d) — a das zweite Glied eines abnehmenden Verhältnisses.

Oder es sei das erste Glied = a, das zweite Glied = b, die Differenz = d, so ist a = b + d; mithin

D 3 (b+d)

kann man, anstatt der Biquadratwurzel, die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel einer gegebenen Zahl extrahiren.

```
Z. B.  2|07|36 | 1|44 | 12
       1          1
       ---        ---
       107         44
        (2)4      (2)2
         96        44
       ------     ----
         1136      0
         (2 8)4
         1136
        ------
           0
```

$(b + d) - b$ der allgemeine Ausdruk eines ieden arithmetischen Verhältnisses. Auch hier kommt es darauf an, ob $a - b$ ein zunehmendes oder ein abnehmendes Verhältnis ist. Im ersten Falle, ist d negativ, im zweiten Falle aber d positiv.

2. Zusaz.

Eben so sezt man einen allgemeinen Ausdruk für iedes mögliche geometrische Verhältnis fest, wenn man das erste Glied $= a$, den Exponent $= e$ annimmt. Nach dieser Bestimmung ist $a : ae$ ein zunehmendes, $\frac{a}{e} : a$ aber ein abnehmendes Verhältnis. Oder: es sei das erste Glied $= a$, das zweite $= b$, der Exponent $= e$ so ist $a = be$; mithin $be : b$ der allgemeine Ausdruk eines ieden geometrischen Verhältnisses. Auch hier kommt es darauf an, ob $a : b$ ein zunehmendes, oder ein abnehmendes Verhältnis ist. Im ersten Fall ist $b = ae$, im zweiten Falle aber $b = \frac{a}{e}$. Ueberhaupt kann man das grössere Glied als das Dividendum, das kleinere als Divisor, und den Exponent als den Quotienten ansehen, den man erhält, wenn das kleinere in das grössere Glied dividirt wird. Eben daher kann auch iedes allgemein ausgedrükte geometrische Verhältnis als ein Bruch angesehen werden, und umgekehrt ieder Bruch oder Quotient als ein geometrisches Verhältnis, wie z. B. $a : b$ und $\frac{a}{b}$.

3. Zusaz.

Sezt man nach Zusaz 1, $a = 8$, und $d = 4$, so ist $8 - 8 + 4$, und $8 + 4 - 8$; oder ist $a = 12$, $b = 8$, und $d = 4$, so ist $12 = 8 + 4$, folglich $12 + 4 - 12$ ein arithmetisches, aber speciell durch Zahlzeichen ausgedrüktes Verhältnis. Eben so nach Zusaz 2.
$a =$

a = 12, e = 3, so ist auch 12 : 12 . 3, und $\frac{12}{3}$: 12; oder ist a = 12, b = 4, e = 3, so ist 12 = 4 . 3; mithin 4 . 3 : 4 ein arithmetisches, aber speciell durch Zahlzeichen ausgedrükktes Verhältnis. Beide Verhältnisse sind zunehmende, wenn das grössere, das Vorderglied; abnehmende hingegen wenn das kleinere das Vorderglied ist.

4. Zusaz.

Läßt sich der Exponent des Verhältnisses weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch ausdrüken, und ist folglich eine Irrationalzahl §. 112.: so heißt das Verhältnis ein Irrationalverhältnis, welches entsteht, wenn eines von beiden, oder beide Glieder selbst Irrationalgrössen sind. Z. B. $\sqrt{2} : 8$; $6\sqrt{7} : 3\sqrt{3}$. Sind in dem lezten Falle, die unter dem Wurzelzeichen stehende Grössen gleich groß, wie z. B. $6\sqrt{5} : 2\sqrt{5}$, so wird der Exponent, weil $\sqrt{5}$ in beiden Gliedern gleich groß ist, rational, daher man auch diese Verhältnisse als Rationalverhältnisse betrachtet. Aber auch die irrationalen Exponenten kann man in allen Fällen so genau, als es nur nöthig, durch Zahlen ausdrüken.

5. Zusaz.

Alle arithmetische Verhältnisse, die einerlei Differenz, und alle geometrische Verhältnisse, die einerlei Exponenten haben, sind einander gleich. Daher sind die arithmetischen Verhältnisse z. B. 3 — 5, 7 — 9; 19 — 17; 6 — 4 einander gleich, weil die Differenz eines ieden = 2 ist; eben so die geometrischen Verhältnisse z. B. 4 : 12, 5 : 15; 30 : 10, 18 : 6, weil der Exponent eines ieden = 3 ist. Also kann bei den arithmetischen Verhältnissen von der Gleichheit der Differenzen, auf die Gleichheit der Verhältnisse, und bei den geometrischen von der Gleichheit der Exponenten auf die Gleichheit der Verhältnisse geschlossen werden, und umgekehrt.

Lehrsäze.

§. 140. Zwei Verhältnisse, sowohl arithmetische als auch geometrische, die einem dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

Beweis.

Da dieser Saz der in §. 14. angeführte allgemeine Grundsaz ist und hier auf einen besondern Fall angewandt wird: so ist der Beweis von selbst einleuchtend.

$$\begin{array}{l} 8 - 11 = 1 - 4 \text{ und} \\ 9 - 12 = 1 - 4 \\ \hline 8 - 11 = 9 - 12 \end{array}$$

Eben so

$$\begin{array}{l} 4 : 12 = 1 : 3 \text{ und} \\ 5 : 15 = 1 : 3 \\ \hline 4 : 12 = 5 : 15 \quad *) \end{array}$$

Das dritte Verhältnis 1 : 3 kann als der gleiche Exponent beider Verhältnisse angesehen werden.

§. 141. Wenn man die Glieder eines geometrischen Verhältnisses a : b, mit einerlei Zahl x (x sei eine ganze oder eine gebrochene Zahl) multiplicirt oder dividirt, so verhalten sich im ersten Falle die Produkte wie die Multiplikanda, im zweiten Falle aber die Quotienten, wie die Dividenda.

Beweis.

Es ist $a : b = \frac{a}{b}$, und $ax : bx = \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ (§. 31.)

eben so $\frac{a}{x} : \frac{b}{x} = \frac{ax}{bx}$ (§. 38.) $= \frac{a}{b}$.

Da

*) Dies nannten die Alten ex aequo simpliciter schliessen.

Da nun die Exponenten der Verhältnisse einander gleich, so sind die Verhältnisse einander selbst gleich (§. 139. Zus. 5.).

1. Zusaz.

Ist daher ein geometrisches Verhältnis durch zwei ganze Zahlen ausgedrükt, und man dividirt beide Glieder durch einerlei dritten Zahl, so erhält man neue Verhältnisse, die mit ienen einerlei Grösse haben. Z. B. 24 : 96 ist = 4 : 16 und = 2 : 8. Auch ist dieser Saz richtig, wenn beide Glieder, oder nur eines von beiden, Brüche sind. So ist z. B. $\frac{3}{4} : \frac{5}{9}$ einerlei mit $\frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} : \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = 3 \cdot 9 : 5 \cdot 4 = 27 : 20$. Eben so $4 : \frac{2}{5}$ einerlei mit $\frac{20}{5} : \frac{2}{5} = 20 : 2$. Will man daher Verhältnisse in Ansehung ihrer Grösse mit einander vergleichen; so darf man nur iedes Glied derselben mit seinem ersten dividiren, so erhält man ienen gleiche Verhältnisse, deren erstes Glied 1 ist. Z. B. 7 : 22; 113 : 355; 100 : 314. Sezt man die Rechnung fort, so erhält man, statt 7 : 22 das Verhältnis 1 : 3,142857 ....; an statt 113 : 355 das Verhältnis 1 : 3,141592 ...; und an statt 100 : 314 das Verhältnis 1 : 3,14.

2. Zusaz.

Sind beide Glieder eines Verhältnisses Irrationalzahlen von gleichen Wurzelexponenten, und die unter dem Wurzelzeichen stehende Grössen sind einander gleich: so ist das Verhältnis dieser beiden Irrationalgrössen selbst rational. So ist z. B. $4\sqrt{7} : 6\sqrt{7}$ einerlei mit dem Verhältnisse 4 : 6; auch $3\sqrt{12} : 2\sqrt{3}$ einerlei mit $6\sqrt{4} : 2\sqrt{3}$, also einerlei mit 6 : 2. Oder überhaupt $m\sqrt[x]{p^x q} : a\sqrt[x]{q}$ einerlei mit $mp\sqrt[x]{q} : a\sqrt[x]{q}$, und also auch einerlei mit dem Verhältnisse mp : a (§. 38.).

2. Von den Proportionen überhaupt.

Erklärung.

§. 142. Die Gleichheit zweier Verhältnisse heißt eine Proportion, und diese erkennt man aus der Gleichheit der Verhältnisnamen. Die Proportion ist entweder arithmetisch oder geometrisch, ie nachdem die Verhältnisse arithmetisch oder geometrisch sind. Die bei den Zahlenproportionen §. 83. und in den Zusäzen, angegebenen Benennungen, finden auch bei den allgemein ausgedrükten Proportionen statt.

Die allgemeine Form einer arithmetischen Proportion ist $a - (a + d) = b - (b + d)$ oder $(a + d) - a = (b + d) - b$, da denn die erste Form ein allgemeiner Ausdruk für iede zunehmende, die zweite Form aber ein allgemeiner Ausdruk für iede abnehmende arithmetische Proportion sein kann. Die allgemeine Form einer geometrischen Proportion aber ist: $a : ae = b : be$ oder $ae : a = be : b$. Auch hier ist die erste Form ein allgemeiner Ausdruk für iede zunehmende, die zweite Form ein allgemeiner Ausdruk für iede abnehmende geometrische Proportion.

1. Zusaz.

Die ståte arithmetische Proportion wird allgemein auf diese Art ausgedrükt $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$ oder $(a + d) - a = (a + 2d) - (a + d)$. Die ståte geometrische Proportion auf folgende Art: $a : ae = ae : ae^2$, oder $ae : a = ae^2 : ae$. Gemeiniglich sezt man den Exponent des Verhältnisses den gegebenen Grössen in iedem Falle voran $a : ea = ea : e^2a$ *).

2. Zu-

*) Andere nennen den Exponent m und dann erhält man folgenden Ausdruk $a : ma = ma : m^2a$, welcher mit dem oben gewählten völlig

2. Zusaz.

Daraus folgt, man kann in einer ieden arithmetischen und in einer ieden geometrischen Proportion, das erste Glied mit dem zweiten, und das dritte mit dem vierten verwechseln und es bleibt dennoch eine richtige Proportion.

3. Zusaz.

Bezeichnet $a : b = c : d$ eine iede geometrische Proportion, und man sezt $a = b$, so muß auch $c = d$ sein, d. i. die Exponenten $a : b$, $c : d$ müssen in beiden Verhältnissen 1 sein. Oder sezt man $a = c$, so muß auch $b = d$ sein, weil sonst die Exponenten $a : b$ und $c : d$ oder die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ungleich wären, und daher keine Proportion ausmachen könnten. Wählt man Zahlen, anstatt der Buchstaben, so gelten diese Bemerkungen auch für Zahlen.

A. Von den arithmetischen Proportionen insbesondere.

Lehrsäze.

§. 143. In ieder arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder, der Summe der mittlern gleich.

Beweis.

völlig einerlei ist. Hier ist e anstatt m um deswillen gewählt, damit man sich sogleich an den Exponent des Verhältnisses erinnern soll. Auch kann man eine iede arithmetische oder geometrische Proportion mit andern Buchstaben bezeichnen.

Z. B. $a - b = c - d$ oder
$b - a = d - c$; ferner
$a : b = c : d$, oder
$b : a = d : c$

diese Ausdrüke können in allen Fällen an statt iener gesezt werden, wenn man nur die gegebenen Begriffe damit verbindet.

Beweis.

In dem allgemeinen Ausdruke ist $a - (a + d) = b - (b + d)$ oder $(a + d) - a = (b + d) - b$ nach §. 142.; und es ist

$$a - (a+d) = b - (b+d) \qquad (a+d) - a = (b+d) - b$$

$$a + b + d \qquad\qquad a + b + d$$

$$a + b + d \qquad\qquad a + b + d$$

Oder

Es sei $a = 6$, $b = 10$, $d = 4$; so ist

$$6 - (6+4) = 10 - (10+4) \qquad (6+4) - 6 = (10+4) - 10$$

$$4 + 6 + 10 \qquad\qquad 4 + 6 + 10$$

$$4 + 6 + 10 \qquad\qquad 4 + 6 + 10$$

1. Zusaz.

In ieder ståten arithmetischen Proportion ist das doppelte mittelste Glied so groß, als die Summe des ersten und dritten.

Denn

$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$ nach §. 142. Zus. 1.

$$2a + 2d$$

$$2a + 2d$$

oder

wenn $a = 4$, $d = 3$ ist, so ist

$$4 - (4 + 3) = (4 + 3) - (4 + 2 \cdot 3)$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4.$$

2. Zusaz.

Hieraus folgt, man kann in ieder arithmetischen Proportion die mittlern Glieder mit einander verwechseln, und

und die Proportion bleibt dennoch richtig. Also ist auch $a - b = a + d - b + d$ (§. 143.). Bei der ståten Proportion leuchtet es von selbst ein (Zus. 2.).

§. 144. Wenn die Summe zweier Grössen $a + d$ und $b + c$ gleich groß ist: so sind die beiden Theile der einen Summe, zwischen den beiden Theilen der andern mittlere arithmetische Proportionalgrössen, d. i. $a - b = c - d$.

Beweis.

$a+d = b+c$			$2+8 = 4+6$	
$b = b$	subtr.		$4 = 4$	
$a+d-b = c$	§. 26.		$2+8-4 = 6$	
$d = d$	subtr.		$8 = 8$	
$a-b = c-d$			$2-4 = 6-8$	

Zusaz.

Man hat also zwei allgemeine Kennzeichen, vermittelst welcher die Richtigkeit einer ieden arithmetischen Proportion geprůft werden kann.

1. Die Gleichheit der Differenzen ihrer Verhåltnisse §. 142.
2. Die Gleichheit der Summen der åussern und mittlern Glieder §. 144 *).

Aufgaben.

§. 145. Zu drei gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das vierte zu finden.

Auf=

*) Es ist vǒllig gleichgůltig, welches von beiden Kennzeichen man zur Průfung der Richtigkeit der Proportionen nehmen will. Anfångern ist es nůzlich, wenn sie sich bei ein und eben derselben Proportion beider Kennzeichen bedienen.

Auflösung und Beweis.

Man addire die beiden mittlern Glieder und subtrahire das erste, so zeigt der Rest die Grösse des vierten Gliedes. Es sei a das erste, a + d das zweite, b das dritte, und x bezeichne das vierte Glied, welches gefunden werden soll: so ist

$$a - (a + d) = b : x; \quad \text{mithin}$$
$$a + x = (a + d) + b \quad (\S.\ 143.)$$
$$a = a \quad \text{subtr.}$$
$$\overline{x = (a + d) + b - a = b + d,} \quad \text{also:}$$
$$a - (a + d) = b - (b + d) \quad \S.\ 142.$$

In Zahlen findet man die Auflösung §. 84.

Zusatz.

Soll man zu zwei gegebenen Gliedern das dritte finden, so subtrahirt man von dem doppelten zweiten das erste Glied. Ist a das erste, a + d das zweite, so ist 2a + 2d das doppelte zweite Glied. Da nun $a - (a + d) = (a + d) - x$ und $a + x = a + d + a + d$ ist; so ist auch, wenn a subtrahirt wird, $x = a + 2d$, und $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$ eine richtige stäte Proportion nach §. 143. Zus. 1. Ist 3 und 7 gegeben, so ist 2.7 das doppelte zweite Glied. Wird nun von 14 die Zahl 3 subtrahirt, so wird 11 die Zahl des gesuchten vierten Gliedes, und es verhält sich $3 - 7 = 7 - 11$.

§. 146. **Zu den äussern Gliedern einer stäten arithmetischen Proportion, das mittlere Glied zu finden.**

Auflösung und Beweis.

Man nehme die halbe Summe der äussern Glieder, so hat man das mittlere Glied (§. 143.).

Es sei a und b gegeben, so ist a + b die Summe der äussern und $\frac{1}{2}(a + b)$ das mittlere Glied, daher ist auch

$a - \frac{1}{2}$

$a - \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(a + b) - b$. Ist 8 und 12 gegeben, so ist $\frac{1}{2}(8 + 12) = \frac{8 + 12}{2} = 10$ die mittlere arithmetische Proportionalzahl, und es ist $8 - 10 = 10 - 12$.

Zusaz.

Wenn a, b, c drei ståte arithmetische Proportionalgrössen sind, und d die Differenz der Glieder der Proportion ist, so muß $b = a + d$, und $c = a + 2d$ sein. Aber $2d = c - a$, also $d = \frac{1}{2}(c - a)$; mithin $b = a + \frac{1}{2}(c - a)$, also auch $b = \frac{1}{2}(a + c)$, und es ist $a - a + \frac{1}{2}(c - a) = a + \frac{1}{2}(c - a) - c$, welches nach §. 143. eine richtige Proportion ist.

B. Von den geometrischen Proportionen insbesondere.

Lehrsåze.

§. 147. In ieder geometrischen Proportion ist das Produkt der åussern Glieder, dem Produkte der mittlern gleich.

Beweis.

In dem allgemeinen Ausdruke $a : ae = b : be$ und $ae : a = be : b$ erhålt man, wenn man das Produkt der åussern und mittlern Glieder sucht: abe.

Denn $a : ae = b : be$	$4 : 8 = 10 : 20$
abe	80
abe	80
und $ae : a = be : b$	$8 : 4 = 20 : 10$
abe	80
abe	80

Zusaz.

Zusaz.

In ieder ståten Proportion ist das Produkt der åussern Glieder so groß, als die Quadratzahl des mittlern Gliedes.

Denn $a : ae = ae : ae^2$ — $4 : 8 = 8 : 16$

$ae . ae = (ae)^2$ — $8 . 8 = 8^2$

$a . ae^2 = (ae)^2$ — $4 . 16 = 64 = 8^2$

§. 148. Wenn zwei Produkte zweier Grössen gleich sind, so sind die beiden Faktoren des einen Produkts mittlere Proportionalgrössen zwischen den beiden Faktoren des andern Produkts.

Beweis.

Es sei $ad = bc$ — $4 . 6 = 2 . 12$

$b = b$ div. — $2 = 2$

so ist $\frac{ad}{b} = c$ §. 38. — $\frac{4 . 6}{2} = 12$

$d = d$ div. — $6 = 6$

also auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§. 38.) — $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$

oder $a : b = c : d$ (§. 142. Zus. 3.) oder $4 : 2 = 12 : 6$.

1. Zusaz.

Daher geben zwei gleiche Produkte, folglich auch zwei gleiche Brůche in iedem Falle eine geometrische Proportion.

2. Zusaz.

Also hat man auch hier zwei allgemeine Kennzeichen, vermittelst welcher die Richtigkeit einer ieden geometrischen Proportion geprůft werden kann:

1. Die

1. Die Gleichheit der Exponenten ihrer Verhältnisse §. 142.
2. Die Gleichheit der Produkte der äussern und mittlern Glieder. §. 147.

Aufgaben.

§. 149. Zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion, das vierte zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man dividire das Produkt der mittlern Glieder, durch das erste, so zeigt der Quotient die Grösse des vierten Gliedes. Es sei a das erste, ae das zweite, b das dritte, und x das vierte Glied, welches gefunden werden soll:

so ist $a : ae = b : x$
und $ax = abe$ (§. 147.)
$a = a$ div.

$$x = \frac{abe}{a} = be$$

also $a : ae = b : be$ (§. 142)

In Zahlen findet man die Auflösung §. 84.

Zusatz.

Sind nur zwei Glieder gegeben, und man soll das dritte finden, so dividirt man die Quadratzahl des zweiten mit dem ersten Gliede.

$a : ae = ae : x$
$ax = (ae)^2$ (§. 147. Zus.)
$a = a$ div.

$$x = \frac{(ae)^2}{a} = ae^2,$$

also ist die Proportion $a : ae = ae : ae^2$ (§. 142. Zus. 1.).

Ist 4 und 8 gegeben, so ist $8^2 = 64$, und $\frac{64}{4} = 16$ ist das dritte Glied zu 4 und 8 einer ståten Proportion, 4, 8, 16, oder $4 : 8 = 8 : 16$ (§. 147.).

§. 150. Zu zwei gegebenen Gliedern, das mittlere Glied einer ståten Proportion zu finden.

Auflösung.

Man extrahire die Quadratwurzel aus dem Produkte der äussern Glieder; so findet man das mittlere Glied. Es sei $a^2 e^2$ dieses Produkt, so ist $\sqrt{(ae)^2} = ae$, und es ist $a : ae = ae : ae^2$.

Ist 2 und 32 gegeben, so ist das Produkt dieser äussern Glieder $2 . 32 = 64$, und $\sqrt{64} = 8$ das mittlere Glied, also $2 : 8 = 8 : 32$ (§. 147. Zusaz.).

Lehrsaz.

§. 151. Jede geometrische Proportion $a : ae = b : be$, oder in Zahlen: $4 : 12 = 5 : 15$, da denn $a = 4$, $b = 5$, und $e = 3$ ist, kann man auf verschiedene Art verändern, und es bleibt dennoch eine richtige Proportion.

1. Durch Umkehrung der Glieder (invertendo):

$ae : a = be : b$, weil $\frac{a}{ae} = \frac{b}{be} = \frac{1}{e}$, oder $12 : 4 = 15 : 5$.

2. Durch Versezung der Glieder (permutando):

$a : b = ae : be$, weil $\frac{b}{a} = \frac{be}{ae} = e$, oder $4 : 5 = 12 : 15$.

3. Durch

3. Durch Addition der Glieder (componendo):

1) $a : ae + a = b : be + b$, weil $\frac{ae + a}{a} = \frac{be + b}{b} = e + 1$

oder $4 : 12 + 4 = 5 : 15 + 5$,
d. i. $4 : 16 = 5 : 20$.

2) $a + ae : ae = b + be : be$, weil $\frac{ae}{a + ae} = \frac{be}{b + be} = \frac{e}{1 + e}$,

oder $4 + 12 : 12 = 5 + 15 : 15$,
d. i. $16 : 12 = 20 : 15$.

4. Durch Subtraktion der Glieder (subtrahendo):

1) $a : ae - a = b : be - b$, weil $\frac{ae - a}{a} = \frac{be - b}{b} = e - 1$,

oder $4 : 12 - 4 = 5 : 15 - 5$,
d. i. $4 : 8 = 5 : 10$.

2) $ae - a : ae = be - b : be$, weil $\frac{ae}{ae - a} = \frac{be}{be - b} = \frac{e}{e - 1}$,

oder $12 - 4 : 12 = 15 - 5 : 15$,
d. i. $8 : 12 = 10 : 15$.

5. Durch Multiplikation der Glieder:

$am : aem = bn : ben$, weil $\frac{aem}{am} = \frac{ben}{bn} = e$,

oder $4 . 5 : 12 . 5 = 5 . 6 : 15 . 6$,
d. i. $20 : 60 = 30 : 90$.

 6. Durch

6. Durch Division der Glieder:

$\frac{a}{m} : \frac{ae}{m} = \frac{b}{n} : \frac{be}{n}$, weil $\frac{ae}{m} \cdot \frac{m}{a} = \frac{be}{n} \cdot \frac{n}{b} = e$,

oder $\frac{4}{5} : \frac{12}{5} = \frac{5}{6} : \frac{15}{6}$,

denn $\frac{12}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{6} \cdot \frac{6}{5} = 3$.

7. Durch Erhebung aller vier Glieder zu gleich hohen Potenzen.

$a^2 : (ae)^2 = b^2 : (be)^2$, weil $\frac{a^2 e^2}{a^2} = \frac{b^2 e^2}{b^2} = e^2$,

oder $4^2 : 12^2 = 5^2 : 15^2$,
d. i. $16 : 144 = 25 : 225$.

$a^3 : (ae)^3 = b^3 : (be)^3$, weil $\frac{a^3 e^3}{a^3} = \frac{b^3 e^3}{b^3} = e^3$,

oder $4^3 : 12^3 = 5^3 : 15^3$,
d. i. $64 : 1728 = 125 : 3375$.

Allgemein:

$a^n : (ae)^n = b^n : (be)^n$, weil $\frac{a^n e^n}{a^n} = \frac{b^n e^n}{b^n} = e^n$,

oder $4^n : 12^n = 5^n : 15^n$.

8. Durch Extrahiren gleichnamiger Wurzeln aus allen vier Gliedern.

$\sqrt{a} : \sqrt{ae} = \sqrt{b} : \sqrt{be}$,

weil $\frac{\sqrt{a}\sqrt{e}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}\sqrt{e}}{\sqrt{b}} = \sqrt{e}$,

oder $\sqrt{4} : \sqrt{12} = \sqrt{5} : \sqrt{15}$,

weil $\frac{\sqrt{4}\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}$.

$\sqrt[3]{a}$:

$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{ae} = \sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{be}$,

weil $\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{e}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{e}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{e}$,

oder $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{15}$,

weil $\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{3}$.

Allgemein: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ae} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{be}$,

weil $\frac{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{e}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{e}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{e}$,

oder $\sqrt[n]{4} : \sqrt[n]{12} = \sqrt[n]{5} : \sqrt[n]{15}$,

weil $\frac{\sqrt[n]{4}\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{4}} = \frac{\sqrt[n]{5}\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{5}} = \sqrt[n]{3}$.

Legt man bei n. 7. diese Proportion $1 : 2 = 3 : 6$ zum Grunde, so sieht man die Richtigkeit der Proportion nach den angeführten Veränderungen noch leichter ein.

$1 : 2 = 3 : 6$

$1^2 : 2^2 = 3^2 : 6^2$, d. i. $1 : 4 = 9 : 36$

$1^3 : 2^3 = 3^3 : 6^3$, d. i. $1 : 8 = 27 : 216$.

Eben so nach n. 8. umgekehrt:

$1 : 4 = 9 : 36$

also $\sqrt{1} : \sqrt{4} = \sqrt{9} : \sqrt{36}$, d. i. $1 : 2 = 3 : 6$.

Eben so da $1 : 8 = 216 : 1728$;

so ist auch $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{216} : \sqrt[3]{1728}$,

d. i. $1 : 2 = 6 : 12$.

Zusammensezung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen.

Erklärungen.

§. 152. Wenn man die gleichnamigen Glieder zweier oder mehrerer geometrischen Verhältnisse mit einan-

der multiplicirt: so heißt das Verhältnis solcher Produkte aus den einzelnen Verhältnissen der Faktoren, ein **zusammengesetztes Verhältnis**. So ist z. B. ace : bdf aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f, zusammengesezt. Oder wäre

$$a : b = m : n$$
$$c : d = p : q$$
$$e : f = r : s$$

so wäre das Verhältnis ace : bdf aus den gleichen Verhältnissen m : n, p : q, r : s zusammengesezt. Eben so verhält es sich mit Zahlen. 1 . 2 . 3 : 4 . 5 . 6, oder 6 : 120 ist aus den Verhältnissen 1 : 4, 2 : 5, 3 : 6 zusammengesezt.

§. 153. Sind die einzelnen Verhältnisse, aus welchen das zusammengesezte besteht, so viel ihrer auch sind, alle einander gleich: so nennt man das zusammengesezte Verhältnis ein um so viel **höheres, multiplicirtes** oder **vervielfältigtes Verhältnis** als die Anzahl der einzelnen Verhältnisse, welche **submultiplicirte** heissen, beträgt. Ist das höhere Verhältnis aus **zwei** gleichen Verhältnissen zusammengesezt, so heißt es insbesondere ein zweimal höheres, **duplirtes** oder ein **quadratisches**; ist es aber aus **drei** gleichen Verhältnissen zusammengesezt, ein dreimal höheres, **triplirtes** oder ein **kubisches Verhältnis** rc. Die einfachen Verhältnisse, woraus duplirte und triplirte entstehen, werden daher **subduplirte** und **subtriplirte Verhältnisse** genannt.

Nach

Nach diesem wäre also

$$m : n = a : b$$
$$p : q = a : b$$
$$r : s = a : b,$$ folglich

$mp : nq = a^2 : b^2 = (a : b)^2 = (m : n)^2$, d. i. mp ist zu nq in einem zweimal höhern oder quadratischen Verhältnisse des a zu b; $mpr : nqs = a^3 : b^3 = (a : b)^3 = (m : n)^3$ aber in einem dreimal höhern oder kubischen Verhältnisse des a zu b, oder des m : n.

Oder in Zahlen 1 : 2
3 : 6
4 : 8

so ist 1 . 3 : 2 . 6, d. i. 3 : 12 ein quadratisches, 1 . 3 . 4 : 2 . 6 . 8, d. i. 12 : 96 ein kubisches Verhältnis, in so fern man sich vorstellen kann, daß diese Verhältnisse, aus den Verhältnissen 1 : 2, 3 : 6, 4 : 8 entstanden sind.

Wenn Ruthe : Fus = 10 : 1
Fus : Zoll = 10 : 1
Zoll : linie = 10 : 1
linie : Skrupel = 10 : 1

so ist das Verhältnis Ruthe zum Skrupel zusammengesezt aus dem einfachen Verhältnis 10 : 1, 10 : 1, 10 : 1, 10 : 1. *)

Zusaz.

Weil nach §. 141. ein Verhältnis nicht geändert wird, wenn man die Gliederstellen mit einerlei Zahl dividirt, so

*) Die Anwendung der quadratischen und kubischen Verhältnisse in der Geometrie auf die Bestimmung der Verhältnisse der Flächen und körperlichen Inhalte gegen einander, wird diese Benennungen völlig rechtfertigen.

so kann man auch die Glieder eines zusammengesezten Verhältnisses mit einerlei Zahl, wenn es nämlich ohne Rest geschehen kann, dividiren, um die Zahlenrechnung in manchen Fällen abzukürzen.

Lehrsäze.

§. 154. Der Exponent eines zusammengesezten Verhältnisses, ist dem Produkte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse gleich.

Beweis.

Es sei, a : b, c : d, e : f = ace : bdf. Ist nun $\frac{b}{a} = m$, $\frac{d}{c} = n$, $\frac{f}{e} = o$, so hat man, weil b = am, d = cn, f = eo, anstatt ace : bdf das eben so grosse Verhältnis ace : amcneo, dessen Exponent mno ist, weil $\frac{amcneo}{ace} = mno$ ist.

1. Zusaz.

Ist das zusammengesezte Verhältnis ein quadratisches, so ist der Exponent desselben die zweite Potenz oder die Quadratzahl; ist es ein kubisches, so ist der Exponent desselben die dritte Potenz oder die Kubikzahl von dem Exponenten des einfachen Verhältnisses. Also überhaupt: wenn aus n gleichen Verhältnissen, ein höheres entsteht, so ist der Exponent desselben $= e^n$, und daher ist auch ein höheres Verhältnis demjenigen gleich, welches entsteht, wenn man beide Glieder des einfachen Verhältnisses, auf eine Potenz erhebt, deren Exponent mit der Anzahl der einfachen Verhältnisse einerlei ist, die dem höhern zum Grunde gelegt worden. So ist z. B. ace = bdf $= a^3 : b^3 = c^3 : d^3 = e^3 : f^3$.

2. Zu-

2. Zusaz.

Daher ist auch das Verhältnis zweier Potenzen vom nten Grade, nmal so groß, als das Verhältnis ihrer Wurzeln, und umgekehrt, das Verhältnis zweier Wurzeln der nten Potenz, ist $\frac{1}{n}$ von dem Verhältnisse a : b. Sezt man nun n = 2, und a = 1, so hat man $\sqrt{1}$: $\sqrt{b} = \frac{1}{2}$ (1 : b), d. i. das Verhältnis der Einheit zu der Quadratwurzel, ist halb so groß als das Verhältnis der Einheit zu der Quadratzahl.

Ist n = 3 und a = 1, so ist 1 : $\sqrt[3]{b} = \frac{1}{3}$ (1 : b), d. i. das Verhältnis der Einheit zu der Kubikwurzel ist der dritte Theil von dem Verhältnisse der Einheit zu der Kubikzahl.

Anmerkung.

Zusammengesezte Verhältnisse und Quotienten können nicht für gleichbedeutend angesehen werden, wie bei den einfachen Verhältnissen §. 139. Zus. 2., welches die vorhergehenden Säze deutlich beweisen.

§. 155. Wenn man die gleichnamigen Glieder zweier Proportionen, von gleichen oder verschiedenen Exponenten mit einander multiplicirt oder dividirt, so ist die Proportion solcher Produkte oder Quotienten, eine zusammengesezte Proportion.

Beweis.

Es sei a : ae = b : be
und c : cE = d : dE,

so ist ac : aceE = bd : bdeE, weil $\frac{aceE}{ac} = \frac{bdeE}{bd} = eE$. Auch ist $\frac{a}{c} : \frac{ae}{cE} = \frac{b}{d} : \frac{be}{dE}$, weil $\frac{ae}{cE} \cdot \frac{c}{a} = \frac{be}{dE} \cdot \frac{d}{b} = \frac{e}{E}$.

In Zahlen $6 : 12 = 10 : 20$
$3 : 9 = 5 : 15$

$18 : 108 = 50 : 300$

$$\frac{6}{3} : \frac{12}{9} = \frac{10}{5} : \frac{20}{15}.$$

§. 156. Soll man zwei Proportionen durch die Multiplikation der Glieder zusammensezen, und es ist ein Hinterglied der einen einem Vordergliede der andern, oder die beiden Hinterglieder der einen den beiden Vordergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen den äussern Gliedern der andern gleich: so können die gleichen Glieder bei der Zusammensezung weggelassen werden.

Beweis.

1. Ist $a : b = c : d$
und $e : f = d : g$,
so ist $ae : bf = cd : dg$, und d kann wegge-
also ist $ae : bf = c : g$ lassen werden:

2. Ist $a : b = c : d$,
und $b : g = d : h$,
so ist *) $a : g = c : h$,
weil $ab : bg = a : g$,
und $cd : dh = c : h$, nach n. 1.

3. Ist $a : b = c : d$
und $b : g = h : c$,
so ist **) $a : g = h : d$,
weil $ab : bg = a : g$,
und $ch : dc = h : d$, nach n. 1.

Zah-

*) Bei den Alten heißt dies ordinatim ex aequo schliessen.

**) per turbatim ex aequo.

Zahlenbeispiele.

a. $2 : 4 = 3 : 6$
$5 : 15 = 6 : 18$
$2.5 : 4.15 = 3 : 18$
d. i. $10 : 60 = 3 : 18$

b. $2 : 4 = 3 : 6$
$4 : 12 = 6 : 18$
$2 : 12 = 3 : 18$

c. $2 : 4 = 3 : 6$
$4 : 12 = 1 : 3$
$2 : 12 = 1 : 6$

§. 157. Sind in zwei Proportionen die Hinterglieder der einen den Hintergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen den mittlern Gliedern der andern gleich: so kann man die gleichen Glieder weglassen, und es sind im ersten Falle die Vorderglieder den Vordergliedern proportionirt, im zweiten Falle aber die Vorderglieder den Hintergliedern umgekehrt proportionirt.

Beweis.

Es sei 1. $a : b = c : d$,
und $g : b = h : d$,
so ist $a : g = c : h$, welches aus §. 156. n. 2. folgt, wenn man die zweite Proportion umkehrt.

2. $a : b = c : d$,
und $g : b = c : h$,
so ist $a : g = h : d$, welches ebenfalls aus §. 156. n. 3. folgt, wenn man die zweite Proportion umkehrt.

Zahlenbeispiele.

a. $2 : 4 = 3 : 6$
$12 : 4 = 18 : 6$
$2 : 12 = 3 : 18$

b. $2 : 4 = 3 : 6$
$12 : 4 = 3 : 1$
$2 : 12 = 1 : 6$

§. 158. Sind zwei Proportionen von einerlei Exponenten: so geben sie, wenn man die Glieder nach einerlei Ordnung addirt oder subtrahirt, eine neue Proportion.

Beweis.

Es sei $a : aE = b : bE$
und $c : cE = d : dE$,
so ist $(a \mp c) : (aE \mp cE) = (b \mp d) : (bE \mp dE)$,
d. i. $a \mp c : E(a \mp c) = b \mp d : E(b \mp d)$.

Ist daher $a : b = p : q$
$c : d = p : q$
$e : f = p : q$,
so ist $(a + c + e : (b + d + f) = 3p : 3q = p : q$

Zahlenbeispiele.

$2 : 4 = 3 : 6$
$5 : 10 = 6 : 12$

$(2 \mp 5) : (4 \mp 10) = (3 \mp 6) : (6 \mp 12)$

ist daher $2 : 4 = 1 : 2$
$3 : 6 = 1 : 2$
$5 : 10 = 1 : 2$

$(2 + 3 + 5) : (4 + 6 + 10) = 3 . 1 : 3 . 2 = 1 : 2$

§. 159. Wenn die Exponenten zweier Proportionen ungleich: so erhält man, wenn die gleichnamigen Glieder addirt oder subtrahirt werden, nur alsdann eine neue richtige Proportion, wenn die Vorderglieder den Vordergliedern poportionirt sind.

Beweis.

Es sei $a : ae = b : be$
$c : cE = d : dE$
und $a : c = b : d$,

so ist $a \mp c : ae \mp cE = b \mp d : be \mp dE$.

In

In der Proportion $a : c = b : d$ sei $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = p$,

so ist $c = ap$, und $d = bp$.

Demnach ist $a : ae = b : be$,
und $ap : apE = bp : bpE$,

also $(1+p)a : (e+Ep)a = (1+p)b : (e+Ep)b$

Da die Produkte der äussern und mittlern Glieder gleich sind, so ist die Proportion richtig. Und weil auch $(1+p)a : (1+p)b = (e+Ep)a : (e+Ep)b$, so folgt die Richtigkeit der Proportion auch aus §. 151. n. 5.

Zahlenbeispiele.

a. $5 : 10 = 6 : 12$
$2 : 4 = 3 : 6$

$5 \mp 2 : 10 \mp 4 = 6 \mp 3 : 12 \mp 6$

b. $5 : 10 = 6 : 12$
$3 : 9 = 5 : 15$

$8 : 19$ in $= 11 : 27$
weil sonst $209 = 216$ wäre.

c. $5 : 10 = 6 : 12$
$15 : 60 = 18 : 72$

$20 : 70 = 24 : 84$

III.

Von den Progressionen.

1. Arithmetische Progressionen.

Erklärung.

§. 160.

Drei und mehr, oder überhaupt eine Menge von gleichen arithmetischen Verhältnissen, wovon jede drei unmittelbar auf einander folgende Glieder, eine

eine ståte arithmetische Proportion ausmachen, geben eine arithmetische Progression oder Reihe. Sind die Verhåltnisse zunehmende, so heißt die Progression ebenfalls eine zunehmende; sind die Verhåltnisse hingegen abnehmende, so heißt die Progression eine abnehmende. Die Differenz der Verhåltnisse, wird die Differenz der Progression genannt: eben so wie die Glieder der Verhåltnisse, Glieder der Progression genannt werden. Die Anzahl der Glieder einer Progression wird vermittelst gewöhnlicher Zahlzeichen über denselben angegeben, und diese Zahlen nennt man Zeiger oder Anzeiger. So ist z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 eine zunehmende; hingegen 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 1 eine abnehmende arithmetische Progression. Von iener ist die Differenz 2, von dieser aber 3.

1. Zusaz.

Da die arithmetische Progression, wenn sie aus 3 Gliedern besteht, nur zwei gleiche Verhåltnisse; wenn sie aus 4 besteht, nur 3 enthålt; so kann man allgemein schliessen: daß iede arithmetische Progression aus so viel gleichen Verhåltnissen bestehe, als dieselbe Glieder hat, weniger Eins.

2. Zusaz.

Allgemein kann man iede arithmetische Progression auf folgende Art bezeichnen. Es sei das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$; so ist in der zunehmenden Progression das folgende Glied allemal dem nåchst vorhergehenden gleich $+$ der Differenz, nach der Formel:

Zeiger	1	2	3	4	5
arithm. Progreß.	a,	$a + d$,	$a + 2d$,	$a + 3d$,	$a + 4d$,
Zeiger	6	7			
arithm. Progreß.	$a + 5d$,	$a + 6d$ rc.			

Worin die Differenz d für die zunehmende positiv, für die abnehmende Progression aber negativ ist.

Lehrsäze.

§. 161. In iedem Gliede einer arithmetischen Progression ist die Differenz so vielmal zu dem ersten Gliede addirt, oder von dem ersten Gliede subtrahirt, als die Anzahl der Glieder, oder der Zeiger, weniger Eins beträgt.

Beweis.

Hat die Progression n Glieder, so ist das lezte Glied einer zunehmenden arithmetischen Progression, dessen Zeiger n ist, $a + (n - 1)d$; einer abnehmenden arithmetischen Progression hingegen $a - (n - 1)d$; das vorlezte Glied einer zunehmenden, dessen Zeiger $n - 1$ ist, $a + (n - 2)d$, einer abnehmenden hingegen $a - (n - 2)d$. Würde nun die Reihe noch mit einem Gliede vermehrt, dessen Zeiger $n + 1$ ist; so wäre dieses Glied $a + nd$ oder $a - nd$ rc. Hierdurch erhält man nach der allgemeinen Formel eine zu- und abnehmende Progression zugleich:

Zeiger	1	2	3	4	5	6
ar. Progr.	a,	$a \mp d$,	$a \mp 2d$,	$a \mp 3d$,	$a \mp 4d$,	$a \mp 5d$ . . .
Zeiger	$n - 1$	n	$n + 1$			
ar. Progr.	$a \mp (n - 2)d$,	$a \mp (n - 1)d$,	$a \mp nd$ . . . *).			

Zusaz.

*) Da beide Arten der Progressionen in allen Stücken bis auf die Differenz übereinstimmen, die nach §. 160. Zus. 2. für die zunehmende

Zusaz.

Also kann man

1. Das lezte Glied einer arithmetischen Progression finden, in welcher das erste Glied a, die Differenz d, und die Anzahl der Glieder n bekannt ist, wenn man die Differenz mit der Anzahl der Glieder weniger Eins multiplicirt, und zu dem Produkte das erste Glied addirt. Z. B. a, d und n sind bekannt, und z bezeichne das lezte Glied, so ist $z = a + (n - 1)d$ nach den im §. angeführten Gründen. Sezt man $a = 2$, $d = 4$, $n = 100$, so ist $z = 2 + 99 . 4 = 2 + 396 = 398$.

2. Wenn d, n und z gegeben sind, a finden. Es ist nehmlich $a = z - (n - 1)d$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Denn} & z & = & a + (n-1)d \\ & (n-1)d & = & (n-1)d \quad \text{subtr.} \\ \hline & z - (n-1)d & = & a \quad (\text{§. 26.}). \end{array}$$

Sezt man $d = 4$, $n = 100$, und $z = 398$: so ist $a = 398 - 99 . 4 = 398 - 396 = 2$.

3. Wenn a, n und z gegeben sind, d finden.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Es ist} & z & = & a + (n-1)d \\ & a & = & a \quad \text{subtr.} \\ \hline & z - a & = & (n-1)d \quad (\text{§. 26.}). \end{array}$$

Wird alsdenn der erhaltene Ausdruk mit $n - 1$ dividirt, so ist $\frac{z - a}{n - 1} = d$ (§. 38. 105.).

Sezt man $a = 1$, $n = 14$, $z = 8$, so ist $d = \frac{8 - 1}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, und die Progression ist 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 7, $7\frac{1}{2}$, 8.

4. Wenn

de positiv, und für die abnehmende negativ gesezt wird: so ist es genug, wenn man sich mit der Natur und den Veränderungen der zunehmenden Progression gehörig bekannt macht.

4. Wenn endlich a, d und z gegeben sind, n finden.

Denn es ist nach n. 3.

$$\begin{array}{rcll} z - a & = & (n - 1)d & \\ d & = & d & \text{div.} \\ \hline \frac{z-a}{d} & = & n - 1 & (\S.\ 38.) \\ 1 & = & 1 & \text{add.} \\ \hline \frac{z-a}{d} + 1 & = & n.\ ^{*)} & (\S.\ 22.) \end{array}$$

Sezt man $a = 1$, $d = \frac{1}{2}$, $z = 8$, so ist $n = \frac{8-1}{\frac{1}{2}} + 1 = 7 : \frac{1}{2} + 1 = 15$.

§. 162. In ieder arithmetischen Progression ist die Summe der äussersten Glieder der Summe iedes Paares von den äussersten gleich weit entfernten Gliedern, wie auch, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, dem mittelsten Gliede doppelt genommen gleich.

Beweis.

In der Reihe §. 161. ist die Summe des ersten und lezten Gliedes $2a + nd$ gleich der Summe des dritten und des $n - 1$ Gliedes $2a + nd$, und so auch bei den übrigen.

Sezt man eine ungerade Anzahl Glieder $\overset{1}{a}$, $a \overset{2}{+} d$, $a \overset{3}{+} 2d$, $a \overset{4}{+} 3d$, $a \overset{5}{+} 4d$, so ist das doppelte dritte Glied $= 2a + 4d$ und das 1ste und 5te ebenfalls $= 2a + 4d$.

Bei=

*) Die Auflösungen der in dem Zusaze angeführten Aufgaben gehören eigentlich in die Algebra, sie lassen sich aber auch sehr leicht, durch Hülfe der Buchstabenrechnung, aus der Form einer Progression entwikeln.

Beispiel in Zahlen.

Man nehme z. B. die Progression 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Um die Summe der äussersten und die Summe iedes Paares von den äussersten gleich weit entfernten Gliedern zu finden, schreibe man die Progression auch rükwärts darunter, und addire Glied vor Glied, so sind die einzelnen Summen gleich.

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21
21,	19,	17,	15,	13,	11,	9,	7,	5,	3,	1
22,	22,	22,	22,	22,	22,	22,	22,	22,	22,	22.

1. Zusaz.

Ist der Zeiger des lezten Gliedes einer ungeraden Progression $2n + 1$, einer geraden aber $2n$; so ist das lezte Glied der ersten Progression $a + 2nd$, der zweiten aber $a + (2n - 1) d$. Folglich ist die Summe der äussersten Glieder einer ungeraden Progression $2a + 2nd$, also das mittelste Glied $a + nd$; und die Summe der äussersten Glieder einer geraden Progression $2a + 2nd - d$, folglich die beiden mittlern Glieder $a + (n - 1) d$, und $a + nd$, und daher ihre Zeiger n und $n + 1$.

2. Zusaz.

Vergleicht man n. 3. des vorigen §s im Zusaze mit der Aufgabe des 146. §s, so folgt, daß man zwischen zwei gegebenen Grössen a und z so viele mittlere finden könne, als man will. Man darf nämlich nur die Differenz der Progression nach n. 3. Zusaz 1. suchen, diese zu iedem nächstvorhergehenden Gliede addiren, so erhält man das folgende (§. 160. Zus. 2.). Diese mittlern Glieder nennt man daher auch wie bei den Proportionen, mittlere arithmetische Proportionalgrössen. Es sei z. B. $a = 1$, $z = 25$, und es sollen 7 mittlere Proportionalgrössen gefunden werden; so ist $n = 9$, und

$d =$

$d = \frac{25 - 1}{9 - 1} = \frac{24}{8} = 3$ (§. 161. Zusaz n. 3.).
Also ist die erste mittlere Proportionalgrösse $= 1 + 3 = 4$; die zweite $4 + 3 = 7$; die dritte $7 + 3 = 10$ 2c. und die Progression 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.

Aufgabe.

§. 163. Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression zu finden, wenn das erste und lezte, nebst der Anzahl der Glieder gegeben ist.

Auflösung.

Man multiplicire die Summe des ersten und lezten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder, so giebt das Produkt die verlangte Summe.

Beweis.

Erster Fall. Wenn die Anzahl der Glieder gerade, oder $2n$ ist, so sind halb so viel, also n Paare von Gliedern in der Progression, wovon iedes Paar der Summe der äussersten Glieder gleich ist (§. 162.). Diese Summe also $n$mal genommen, beträgt so viel als die Summe aller Paare, und daher ist sie der Summe aller Glieder der Progression gleich.

Zweiter Fall. Wenn die Anzahl der Glieder ungerade, oder $2n + 1$ ist, so sind ebenfalls n Paare nebst dem mittelsten Gliede, welches derselben Summe der äussersten Glieder, in der Progression, gleich ist; folglich ist die Summe, statt $n$mal im ersten Falle, hier $n + \frac{1}{2} = \frac{2n + 1}{2}$.

Sezt man das erste Glied $= a$, das lezte $= z$, die Anzahl der Glieder $= m$, die Summe $= S$; so ist $S = (a + z)\frac{m}{2}$. Sezt man nun anstatt $z = a +$

$(m - 1)\,d$, (nach §. 161. Zus. 1. wo nur n statt m genommen ist) so ist auch $S = (2a + (m - 1)\,d)\,\frac{m}{2} = ma + \frac{1}{2}\,(m - 1)\,md$.

Zusaz.

Die Summe $(a + z)\,\frac{m}{2}$ läßt sich noch durch zwei andere Formeln, ohne daß man den Werth derselben verändert, ausdrüken. Es ist nämlich auch $S = \frac{a + z}{2}\,m$ und ebenfalls $S = \frac{2}{(a + 2)\,m}$. Dieser Formeln kann man sich in manchen Fällen mit mehrern Vortheilen als iener im §. bedienen. Soll man z. B.

1. Die Summe der ersten 1000 Zahlen unsers Zahlensystems suchen, so findet man dieselbe nach der Formel $S = \frac{(a + z)\,m}{2} = \frac{1 + 1000\,.\,1000}{2} = \frac{1001\,.\,1000}{2} = 500500$. Oder da $a = 1$, $d = 1$, und $m = 1000$; so ist $S = \frac{m\,(m + 1)}{2} = \frac{1000\,.\,1001}{2} = 500500$.

2. Die Summe der ersten ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 rc. bis m. Das erste Glied ist $a = 1$, die Differenz $d = 2$ und die Anzahl der Glieder m; also ist die Summe $= m + \frac{2\,m\,(m - 1)}{2} = \frac{mm + m}{2} = mm$. Also darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Hieraus

aus folgt: daß die Summe ieder ersten ungeraden Zahlen, so viel ihrer sind, allemal eine Quadratzahl ist.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 rc.
ar. Progr.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 rc.
Summe	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 rc.

Anmerkung.

Werden drei von den fünf Grössen a, d, z, n und S gegeben, so kann man die übrigen beiden allemal finden. Zugleich sieht man, daß sich diese Grössen auf vielerlei Art versezen und dadurch die Menge der Aufgaben vermehren lassen.

Erklärung.

§. 164. Polygonal-, oder vierekige, oder auch figurirte Zahlen entstehen, wenn man die Glieder einer arithmetischen Progression, welche sich mit der Einheit anfängt, summirt; und werden, nachdem die Differenz der Progression 1, 2, 3 rc. ist, drei-, vier-, fünfekige Zahlen genannt, so daß die Differenz der Progression, woraus die Polygonalzahl entsteht, iedesmal um 2 Einheiten kleiner ist als die Zahl der Eken, wornach die Polygonalzahl genannt wird. Die Anzahl der Glieder oder der Zeiger einer solchen Progression, deren Summe eine Polygonalzahl giebt, wird die Seite dieser Polygonalzahl genannt.

Zusaz.

1. Sezt man die Differenz = 1, so entsteht, weil das erste Glied der Progression iedesmal 1 bleibt, folgende arithmetische Progression:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 rc.

Summirt man nun in dieser Progression das erste, das erste und zweite, das erste, zweite und dritte Glied rc.; so erhält man folgende Progression:

 1, 3,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 zc.

so daß 1 = 1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4 zc. Diese Zahlen werden 3ekige Zahlen genannt, und lassen sich durch folgende Zeichen ausdrüken:

Zeiger	1.	3.	6.	10.	15.
Seite	*	* *	* * *	* * * *	* * * * *
3Ek	*	* *	* * *	* * * *	* * * * *
		*	* *	* * *	* * * *
			*	* *	* * *
				*	* *
					* zc.

2. Ist die Differenz = 2, so hat man folgende arithmetische Progression:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 zc.

Die Summen der einzelnen Glieder geben folgende Progression:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 zc.

Diese Zahlen heissen 4ekige Zahlen, und werden auf diese Art bezeichnet:

Zeiger	1.	4.	9.	16.	25.
Seite	*	* *	* * *	* * * *	* * * * *
4Ek		* *	* * *	* * * *	* * * * *
		* *	* * *	* * * *	* * * * *
			* * *	* * * *	* * * * *
				* * * *	* * * * *
					* * * * *
					u. s. w.

3. Ist die Differenz = 3, und verfährt wie im vorigen, so erhält man 5ekige Zahlen.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9	zc.
arithm. Progr.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25	zc.
5Ek	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117	zc.

Auf

Auf eben die Art findet man die 7ekigen, 8ekigen 2c. und die Formen derselben lassen sich auf die vorhin gezeigte Art ebenfalls darstellen.

Lehrsaz.

§. 165. Die allgemeine Formel einer Polygonalzahl wird durch die allgemeine Formel der Summe einer arithmetischen Progression nach §. 163. bestimmt, nämlich $S = (2a + (m - 1)d)\frac{m}{2} = ma + \frac{m(m-1)d}{2} = ma + \frac{1}{2}(m-1)md.$

Beweis.

Da für jede Polygonalzahl das erste Glied $a = 1$, und für ein nEk die Differenz $d = n - 2$ (§. 164.), so erhält man nach der vorigen diese Formel:

$$m + \frac{m(m-1)(n-2)}{2} = \frac{nm^2 - 2m^2 - nm + 4m}{2}$$
$$= \frac{(n-2)m^2 - (n-4)m}{2}.$$

Dies giebt, wenn die Seite n ist, folgende specielle Formeln:

Für das 3Ek $= \frac{m^2 + m}{2}$

4Ek $= \frac{2m^2 + om}{2} = m^2$

5Ek $= \frac{3m^2 - m}{2}$

6Ek $= \frac{4m^2 - 2n}{2}$

7Ek $= \frac{5m^2 - 3n}{2}$

Für

Für das 8Ek $= \frac{6m^2 - 4n}{2}$

nEk $= \frac{(n-2)m^2 - (n-4)m}{2}$, wie oben *).

2. Geometrische Progressionen.

Erklärung.

§. 166. Drei und mehr, oder überhaupt eine Menge von gleichen geometrischen Verhältnissen, wovon iede drei unmittelbar auf einander folgende Glieder eine städte geometrische Proportion ausmachen, geben eine geometrische Progression oder Reihe. Sind die Verhältnisse zunehmende, so heißt die Progression ebenfalls eine zunehmende; sind die Verhältnisse hingegen abnehmende, so heißt die Progression eine abnehmende. Der Exponent der Verhältnisse, wird der Exponent der Progression genannt: eben so wie die Glieder der Verhältnisse, Glieder der Progression genannt werden. Die Anzahl der Glieder wird hier ebenfalls durch Zahlzeichen angegeben, welche man Zeiger oder Anzeiger nennt. So ist z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 eine zunehmende 2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1 eine abnehmende geometrische Progression.

Zusatz.

Es sei das erste Glied = a, der Exponent = e, so ist das folgende Glied in der zunehmenden Progression alle=

*) Die Anwendung der Polygonalzahlen auf specielle Fälle, kommt in der Artilleriewissenschaft bei der Lehre von der Berechnung der Kugelhaufen vor.

allemal dem nächstvorhergehenden in den Exponenten multiplicirt gleich, nach der Formel:

Zeiger	1	2	3	4	5	6	7	8
geom. Progression	a,	ae,	ae^2,	ae^3,	ae^4,	ae^5,	ae^6,	ae^7 ꝛc.

Worin der Exponent e, für die zunehmende eine ganze Zahl, oder ein unächter Bruch, für die abnehmende Progression aber ein ächter Bruch ist.

Lehrsäze.

§. 167. In iedem Gliede einer geometrischen Progression ist das erste Glied mit einer Potenz des Exponenten multiplicirt, deren Exponent die Anzahl der Glieder, oder der Zeiger, weniger Eins ist.

Beweis.

Hat die Progression n Glieder, so ist das lezte Glied, dessen Zeiger n ist, $a \cdot e^{n-1}$; das vorlezte Glied, dessen Zeiger $n - 1$ ist, $a \cdot e^{n-2}$ ꝛc. Würde die Progression noch mit einem Gliede vermehrt, dessen Zeiger $n + 1$ ist; so wäre dieses Glied $a \cdot e^n$ ꝛc. Hierdurch erhält man eine noch allgemeinere Formel:

Zeiger	1	2	3	4	5
geometr. Progression	a,	ae,	ae^2,	ae^3,	ae^4, ...
Zeiger	$n-1$	n	$n+1$		
geometr. Progression	$a \cdot e^{n-2}$,	ae^{n-1},	ae^n		

Sezt man $a = 1$, so entsteht eine Progression, deren erstes Glied die Einheit ist, und die übrigen sind Potenzen des Exponenten.

Z. B. $1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ ꝛc.
d. i. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 ꝛc.

Zusaz.

Man seze ein für allemal das erste Glied $= a$, den Exponent $= e$, die Anzahl der Glieder $= n$, das lezte

Glied einer geometrischen Proportion $= z$, und man kann auch hier, wie in §. 161. Zusaz 1. und 2. folgende Aufgaben auflösen.

1. Wenn a, e und n gegeben sind, und man soll z finden: so hat man $z = ae^{n-1}$ (§.). Ist nun $a = 1$, $e = 2$ und $n = 13$; so ist $z = 2^{12} = 4096$.

2. Wenn z, e und n gegeben sind, und man soll a finden; so ist $z = ae^{n-1}$

$$e^{n-1} = e^{n-1} \text{ div.}$$

$$\frac{z}{e^{n-1}} = a \quad (\S.\ 38.).$$

Ist $z = 16384$, $e = 4$ und $n = 7$, so ist $a = \frac{16384}{(4)^7} = \frac{16384}{16384} = 1$.

3. Wenn a, n und z gegeben sind, und man soll e finden: so ist $z = ae^{n-1}$

$$a = a \text{ div.}$$

$$\frac{z}{a} = e^{n-1} \quad (\S.\ 38.).$$

Wird nun aus beiden Ausdrüken die Wurzel vom Grad $n - 1$ extrahirt, so erhält man $\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = e$.

Sezt man $a = 1$, $n = 7$ und $z = 64$ so ist $e = \sqrt[6]{64} = 2$ und die Progression ist folgende:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

4. Wäre aber a, e und z gegeben, und man sollte n finden, so ist dieses nach den bisher gegebenen Regeln unmöglich. Die Auflösung dieser Aufgabe wird aber im folgenden in der Algebra vorkommen.

§. 168. In ieder geometrischen Progression ist das Produkt der äussersten Glieder dem Produkte iedes

Paares

Paares von den äussersten gleich weit entfernten Gliedern, wie auch, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, dem Quadrate des mittelsten Gliedes, gleich.

Beweis.

In der Progression $a, ae, ae^2, ae^3 \ldots \overset{n-1}{ae^{n-2}}, \overset{n}{ae^{n-1}}, \overset{n+1}{ae^{n}} \ldots$ ist das Produkt des ersten und lezten Gliedes a^2e^n gleich dem Produkte des zweiten und n Gliedes a^2e^n und so auch bei den übrigen.

Sezt man eine ungerade Anzahl Glieder, z. B. $\overset{1}{a}, \overset{2}{ae}, \overset{3}{ae^2}, \overset{4}{ae^3}, \overset{5}{ae^4}$; so ist das Quadrat des dritten Gliedes $= a^2e^4$ und das Produkt der äussersten Glieder ebenfalls $= a^2e^4$.

Beispiel in Zahlen.

	1,	10,	100,	1000,	10000
	10000,	1000,	100,	10,	1
	1 . 10000,	10 . 1000,	100 . 100,	1000 . 10,	10000 . 1
d. i.	10000,	10000,	10000,	10000,	10000.

Also sind die Produkte derienigen Glieder, welche von den äussersten gleich weit entfernt sind, gleich.

Zusaz.

Ist der Zeiger des lezten Gliedes einer ungeraden Progression $2n + 1$, einer geraden aber $2n$; so ist das lezte Glied der ungeraden Progression ae^{2n}, der geraden aber ae^{2n-1}: folglich das Produkt der äussersten Glieder einer ungeraden Progression a^2e^{2n}, also das mittelste Glied ae^n; und das Produkt der äussersten Glieder einer geraden Progression a^2e^{2n-1}, also die beiden mittlern Glieder ae^{n-1} und ae^n.

Erklä-

Erklärung.

§. 169. Eine geometrische Reihe **interpoliren** heißt, zu ieden zwei unmittelbar auf einander folgenden Gliedern die mittlere Proportionalgrösse suchen nach §. 150.

Ist die Progression a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 gegeben; so ist
$\sqrt{(a^2 e)}$ die mittlere Proportionalgr. zwischen a u. ae
$\sqrt{(a^2 e^3)}$ — — — — ae u. ae^2
$\sqrt{(a^2 e^5)}$ — — — — ae^2 u. ae^3
$\sqrt{(a^2 e^7)}$ — — — — ae^3 u. ae^4.

Also ist die Progression nach dem Interpoliren:

$a, \sqrt{(a^2 e)}, ae, \sqrt{(a^2 e^3)}, ae^2, \sqrt{(a^2 e^5)}, ae^3, \sqrt{(a^2 e^7)}, ae^4.$

Oder:

$a, \quad ae^{\frac{1}{2}}, ae, \quad ae^{\frac{3}{2}}, ae^2, \quad ae^{\frac{5}{2}}, ae^3, \quad ae^{\frac{7}{2}}, ae^4.$

Zusaz.

Auf eine ähnliche Art kann man zu dem ersten und lezten Gliede einer geometrischen Progression, so viele mittlere Proportionalgrössen finden, als man will, wenn man nämlich den Exponent der Progression nach §. 167. Zusaz n. 3. sucht, diesen mit iedem nächstvorhergehenden Gliede multiplicirt, so erhält man das folgende, und durch dieses fortgesezte Verfahren bekommt man die verlangten mittlern Proportionalgrössen. Sind a und z die äussersten Glieder der Progression, und $a = 1$, $z = 64$ und man soll 5 mittlere Proportionalgrössen finden, so ist

$$n = 7, \text{ und } e = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \sqrt[6]{\frac{64}{1}} = 2.$$

Also ist	$1 . 2 = 2$	die 1ste	mittlere	Proportional-	grösse
	$2 . 2 = 4$	= 2te	—	—	—
	$4 . 2 = 8$	= 3te	—	—	—
	$8 . 2 = 16$	= 4te	—	—	—
	$16 . 2 = 32$	= 5te	—	—	—

und die Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Lehr=

Lehrsaz.

§. 170. Die allgemeine Formel für die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression ist $S = \frac{e^n a - a}{e - 1} = \frac{ez - a}{e - 1}$.

Beweis.

Diese Summe ist

$S = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots\ ae^{n-2} + ae^{n-1}$

$e = e$ multipl.

$eS = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots\ ae^{n-1} + ae^n$ (§. 31.).

Wird die erste Reihe davon subtrahirt: so ist

$eS - S$ oder $(e-1)\,S = ae^n - a$ (§. 26.).

$e - 1 \quad = e - 1$ dividirt

Folglich $S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$ (§. 38.).

Sezt man das lezte Glied $= z$, so ist $z = ae^{n-1}$, also $ez = ae^n$, und diesen Werth anstatt des vorigen gesezt $S = \frac{ez - a}{e - 1}$.

1. Zusaz.

Also findet man die Summe einer geometrischen Progression, wenn man von dem Produkte des lezten Gliedes in den Exponenten der Progression das erste Glied subtrahirt, und die erhaltene Differenz mit dem um Eins verminderten Exponenten dividirt.

Beispiel.

Es sei $a = 1$, $e = 2$ und $z = 64$; so ist $S = \frac{2 \cdot 64 - 1}{2 - 1} = \frac{128 - 1}{1} = 127$.

2. Zusaz.

Ist der Exponent in der Progression ein Bruch, so werden in der Formel $\frac{ez-a}{e-1}$ Zähler und Nenner negativ, der Quotient aber, oder die Summe selbst, bleibt positiv (§. 103.). Es sei $a = 1536$, $e = \frac{1}{2}$ und $z = 3$; so ist

$$S = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} - 1536}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1534\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = +\ 3069.$$

3. Zusaz.

Gehen die Glieder einer geometrischen Progression ohne Ende fort, so daß die Anzahl derselben durch keine Zahl angegeben werden kann, und der Exponent ist ein positiver ächter Bruch $\frac{b}{c}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{ac}{c-b}$. Denn sezt man

$$S = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \ldots \text{ ohne Ende}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{c} \quad \text{multipl.}$$

$$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots\ldots \text{ ohne Ende,}$$ (§. 31.)

folglich die leztere Reihe von der erstern subtrahirt, giebt $S - \frac{b}{c}S$ oder $\left(1 - \frac{b}{c}\right)S$, d. i. $\frac{c-b}{c} \cdot S = a$, (§. 26.)

folglich mit $\frac{c-b}{c}$ dividirt, giebt $S = \frac{ac}{c-b}$. (§. 38.)

Ist $a = 1$, $b = 2$, und $c = 3$, so ist die Summe von $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots\ldots$ ohne Ende $= \frac{3}{3-2} = 3$.

Ist bei dieser Voraussezung der Exponent ein negativer ächter Bruch $-\frac{b}{c}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{ac}{c+b}$.

Denn $S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \ldots$ ohne Ende,

$-\frac{b}{c} = -\frac{b}{c}$ multipl.

$-\frac{b}{c}S = -\frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots\ldots$ ohne Ende, (§. 31.)

folglich leztere Reihe subtrahirt,

$S + \frac{b}{c}S$ oder $\left(1 + \frac{b}{c}\right)S$, d. i. $\frac{c+b}{c} \cdot S = a$, (§. 26.)

folglich mit $\frac{c+b}{c}$ dividirt, $S = \frac{ac}{c+b}$. (§. 38.)

Sezt man $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, so ist die Summe von $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \ldots\ldots$ ohne Ende $= \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$.

Sind die Glieder einer Progression ohne Ende, Potenzen des positiven oder negativen Bruches $\frac{1}{a}$, so ist $S = \frac{1}{a+1}$.

Denn im ersten Falle, wenn der Bruch $+\frac{1}{a}$ genommen wird, ist die Summe

$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} \ldots\ldots$ ohne Ende,

$\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ multipl.

$\frac{1}{a}S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \ldots\ldots$ ohne Ende, (§. 31.)

folglich

folglich die leztere Reihe subtrahirt,

$S - \frac{1}{a}S$ oder $\left(1 - \frac{1}{a}\right)S$, d. i. $\frac{a-1}{a} . S = \frac{1}{a}$, (§. 26.)

folglich mit $\frac{a-1}{a}$ dividirt, $S = \frac{1}{a-1}$. (§. 38.)

Ist $a = 2$, so wird $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ ohne Ende $= \frac{1}{2-1} = 1$.

Im zweiten Falle, wenn der Bruch $-\frac{1}{a}$ genommen wird, ist die Summe

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \ldots\ldots \text{ ohne Ende.}$$

Sezt man die Rechnung auf die vorhin beschriebene Art fort, so bekommt man die Summe $S = \frac{1}{a+1}$. Ist $a = 2$, so wird $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \ldots$ ohne Ende $= \frac{1}{3}$.

4. Zusaz.

Wenn auch hier von den fünf Grössen a, e, z, n und S, drei gegeben werden, so kann man die übrigen finden. Durch die verschiedenen Versezungen dieser Grössen, kann man die Anzahl der Aufgaben vervielfältigen. Mehrere davon gehören in die Algebra. Eine der gewöhnlichsten aber ist folgende: a, e und n sind gegeben, man soll S finden.

Nach §. 170. ist $S = \frac{ez - a}{e - 1}$. Sezt man aber statt $z = ae^{n-1}$ §. 167. Zus. n. 1., so ist $S = \frac{ae^{n-1}e - a}{e-1} = \frac{ae^n - a}{e-1}$ (§. 170.).

IV.

IV.

Von den Logarithmen.

Erklärung.

§. 171.

Wenn man mit einer geometrischen Progression, die mit 1 anfängt, deren Exponent a ist, eine arithmetische verbindet, die mit 0 anfängt, und 1 zur Differenz hat: so zeigt iedes Glied der arithmetischen Progression durch seine Einheiten nicht allein die Anzahl der Verhältnisse in der geometrischen Progression vom ersten Gliede an gerechnet, sondern auch die Grösse des Verhältnisses, welches ein iedes Glied in der nämlichen Progression zum ersten hat. Daher nennt man die Zahlen der arithmetischen Progression die Logarithmen (Zahlen der Verhältnisse) der über denselben stehenden Glieder in der geometrischen Progression. Da nun das erste Glied in der geometrischen Progression 1 ist, so sagt man auch kurz: die Glieder der arithmetischen Progression sind die Logarithmen der Zahlen in der geometrischen Progression, unter welchen sie stehen. Z. B.

geometr. Progression 1, a^1, a^2, a^3, a^4, ... a^m, a^n.
arithm. Progression 0, 1, 2, 3, 4, ... m, n.

Weil aber auch die Zahlen, welche die Grösse eines ieden Gliedes in der arithmetischen Progression ausdrüken, mit den Exponenten der Potenzen in der geometrischen Progression einerlei sind: so sind diese Exponenten zugleich die Logarithmen ihrer Potenzen. Den Logarithmen einer Grösse bezeichnet man gewöhnlich mit

log. oder l, und sezt dies Zeichen der Grösse voran. So ist in diesem Beispiele der logarithme von $(a^4 : 1) = 4$, kürzer log. $a^4 = 4$. oder $l . a^4 = 4$ weil $a^4 : 1$ aus den 4 gleichen Verhältnissen $a : 1$ zusammengesezt ist. Eben so ist $l(a^3 : 1) = 3$ oder $la^3 = 3$; allgemein $l . a^m = m$, und $l . a^n = n$ (§. 160. und 166).

1. Zusaz.

Werden die im §. angeführten Progressionen rükwärts verlängert, so erhält man folgende:

geometr. Progr. $\frac{1}{a^n}, \frac{1}{a^m}, \ldots\ldots \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a},$
$1, a^1, a^2, a^3, a^4 \ldots\ldots a^m, a^n.$

arithm. Progr. $-n, -m \ldots\ldots -4, -3, -2, -1,$
$0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m, n.$

woraus man deutlich sieht, daß der Logarithme von 1 Null ist, die Logarithmen der ächten Brüche aber negativ, wenn die Logarithmen der ganzen Zahlen und der unächten Brüche positiv sind, und umgekehrt.

Weil nun eine iede geometrische Progression, deren erstes Glied nicht 1 ist, durch die Division aller Glieder mit dem ersten Gliede, auf eine gebracht werden kann, deren erstes Glied 1 ist, ohne daß die Anzahl und die Grösse der Verhältnisse geändert wird, so sieht man, warum in der oben angeführten Progression, das erste Glied = 1 angenommen ist.

2. Zusaz.

Sezt man anstatt a eine gewisse Zahl z. B. 2, so erhält man die Grösse der Glieder in der geometrischen Progression in Zahlen ausgedrükt, und die dazu gehörigen Logarithmen, in der damit verbundenen arithmetischen Progression.

geom.

geom. Pr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 rc.
arithm. Pr. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 rc.

Also ist in diesem besondern Falle l. 8 = 3, l. 4 = 2, l. 2 = 1.

Sezt man aber a = 3, so erhält man eine andere geometrische Progression, mit den vorigen Logarithmen.
geometr. Progress. 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187 rc.
arithm. Progress. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rc.

Hier ist also l. 81 = 4, l. 27 = 3, l. 9 = 2; l. 3 = 1. Da aber im §. a statt ieder möglichen Zahl gesezt ist: so kann man sich unzählige geometrische Progressionen denken, wozu die nämlichen Logarithmen gehören.

3. Zusaz.

Jede Reihe von Logarithmen, mit einer bestimmten geometrischen Progression verbunden, machen ein logarithmisches System. Die Zahl oder Grösse in der geometrischen Progression, deren Logarithme 1 ist, heißt die Basis, Fundamentalgrösse oder die Grundzahl des Systems. Das Verhältnis dieser Grösse oder Zahl zur Einheit wird das Fundamentalverhältnis genannt. Also ist in dem logarithmischen System §. 171., die Basis a und das Fundamentalverhältnis a : 1. Im zweiten Zusaze aber im ersten Falle die Basis 2, das Fundamentalverhältnis 2 : 1; im zweiten Falle die Basis 3, und das Fundamentalverhältnis 3 : 1. Daher sind diese zwei logarithmischen Systeme verschieden. Hieraus sieht man, daß es so viele logarithmische Systeme giebt, als a Werthe annehmen kann. Auch müssen in einem und eben demselben Systeme die Logarithmen gleicher Zahlen gleich sein, und umgekehrt, obgleich ein und eben derselbe Logarithme zu sehr vielen Zahlen verschiedener Systeme gehören kann.

Lehrsätze.

§. 172. In iedem logarithmischen Systeme ist der Logarithme eines Produkts, der Summe der Logarithmen der Faktoren gleich.

Beweis.

Es sei $a^m = y$, und $a^n = z$, so ist §. 115. $a^{m+n} = y \cdot z$, folglich $m + n = l(y \cdot z)$: da denn m, n, die Logarithmen der Faktoren sind (§. 171.).

1. Zusaz.

Der Logarithme einer Potenz vom Grad n, ist daher nmal so groß als der Logarithme der Wurzel: oder es ist $l \cdot a^n = n\, l \cdot a$. Denn $l \cdot a^n = l \cdot a \cdot a \cdot a \dots\dots$; wo a so oft Faktor ist, als n Einheiten enthält. Mithin $l \cdot a^n = l \cdot a + l \cdot a + l \cdot a \dots\dots$ (§. 172.); also ist $l \cdot a^n = n\, l \cdot a$.

Hiernach ist $l \cdot a^2 = 2\, l \cdot a$, und $l a^3 = 3\, l \cdot a$, d. i. der Logarithme einer Quadratzahl ist doppelt, und der Logarithme einer Kubikzahl dreimal so groß, als der Logarithme der Wurzel.

Also auch umgekehrt: der Logarithme einer Quadratwurzel halb so groß, als der Logarithme ihrer Quadratzahl, und der Logarithme einer Kubikwurzel, der dritte Theil von dem Logarithmen ihrer Kubikzahl; und überhaupt der Logarithme einer Wurzel vom Grad n, ist $\frac{1}{n}$ von dem Logarithmen der Potenz: oder es ist $l \cdot \sqrt{a} = \frac{1}{2}\, l \cdot a$; $l \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}\, l \cdot a$; und überhaupt $l \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\, l \cdot a$. So

ist

ist auch $l a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} l . a$. Denn $l a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{n} l . a^m$, und $\frac{1}{n} l . a^m = \frac{1}{n} . m l . a$, folglich $l a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} . m . l . a = \frac{m}{n} . l . a$.

2. Zusaz.

Daher kann man durch Hülfe der Logarithmen die Multiplikation in Addition, und das Potenziren in Multipliciren verwandeln.

§. 173. Der Logarithme eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors von den Logarithmen des Dividendums subtrahirt.

Beweis.

Es sei $a^m = y$, und $a^n = z$, so ist $a^{m-n} = \frac{y}{z}$ (§. 115.), folglich $m - n = l . \frac{y}{z}$; da denn m der Logarithme des Dividendums, n aber der Logarithme des Divisors ist (§. 172.).

1. Zusaz.

Auf eben diese Art erhält man den Logarithmen eines Bruchs, wenn man nämlich den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers subtrahirt (§. 45.).

2. Zusaz.

Auch ist der Logarithme einer Potenz, deren Exponent negativ ist, dem Produkte dieses Exponenten in den Logarithmen der Wurzel gleich; d. i. $l . a^{-m} = - m . l . a$. Denn

weil $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$: so ist $l.a^{-m} = l.\frac{1}{a^m} = l.1 - l.a^m = - m.l.a$, weil $l.1 = 0$ ist (§. 171.).

3. Zusaz.

Auch folgt hieraus, daß durch Hülfe der Logarithmen die Division in Addition, und das Extrahiren in Dividiren verwandelt werden kann.

§. 174. In dem logarithmischen Systeme, dessen Basis = 10, das Fundamentalverhältnis 10 : 1, der logarithme davon = 1 ist und das gemeine logarithmische System genannt wird, enthält der logarithme der Einheit einer zunehmenden oder abnehmenden Decimalordnung, im ersten Fall so viele positive, im zweiten aber so viele negative, Einheiten, als die Anzahl der iedesmaligen Decimalordnung beträgt.

Beweis.

Da in diesem System $a = 10$: so ist

...	$\frac{1}{a^4}$.	$\frac{1}{a^3}$.	$\frac{1}{a^2}$.	$\frac{1}{a}$.	1.	a.	a^2.	a^3.	a^4.	ꝛc.
...	a^{-4}.	a^{-3}.	a^{-2}.	a^{-1}.	a^0.	a^1.	a^2.	a^3.	a^4.	
	$\frac{1}{10000}$.	$\frac{1}{1000}$.	$\frac{1}{100}$.	$\frac{1}{10}$.	1.	10.	100.	1000.	10000.	
	10^{-4}.	10^{-3}.	10^{-2}.	10^{-1}.	10^0.	10^1.	10^2.	10^3.	10^4.	
Log.	—4.	—3.	—2.	—1.	0.	1.	2.	3.	4.	

Wo also $l.10^0 = l.1 = 0$. Also ist

$$l.10^1 = l.10 = 1;\quad l.\frac{1}{10} = l.0{,}1 = -1.$$

$$l.10^2 = l.100 = 2;\quad l.\frac{1}{10^2} = l.0{,}01 = -2.$$

$l.10^3$

$$l.10^3 = l.1000 = 3;\ l.\frac{1}{10^3} = l.0{,}001 = -3.$$

$$l.10^n = n;\ l.\frac{1}{10^n} = -n.$$

Zusatz.

Hieraus folgt

1. Daß die Decimalbrüche mit den ganzen Decimalzahlen von der nämlichen Ordnung einerlei Logarithmen haben, nur mit dem Unterschiede, daß die zu den Decimalbrüchen gehörigen Logarithmen negativ, die zu den ganzen Decimalzahlen aber positiv sind.
2. Daß der iedesmalige Logarithme so viel Einheiten enthalte, als Nullen der zugehörigen Einheit vor- oder nachgehen; und umgekehrt, daß der Einheit so viel Nullen vor- oder nachgehen müssen, als Einheiten der zugehörige Logarithme enthält; mit dem Unterschiede, daß bei positiven Logarithmen die Nullen der Einheit nach-, bei negativen aber vorgehen.

   So ist z. B. log. 100000000 = 8, und log. 0,00000001 = — 8; umgekehrt aber 8 = log. 100000000, und — 8 = log. 0,00000001.

§. 175. In dem gemeinen logarithmischen Systeme sind die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen die Einheiten zweier unmittelbar auf einander folgenden Decimalordnungen, sie mögen nun zu zunehmenden oder abnehmenden gehören, (d. i. ganze Zahlen oder Decimalbrüche sein,) Brüche, die sich mit der Zahl anfangen, welche der Logarithme der Einheit der nächst vorhergehenden Ordnung ist, und die **Kennziffer** oder **Charakteristik** der Logarithmen genannt wird.

 Beweis.

Beweis.

Da l. 1 = 0, und l. 10 = 1, so muß der Logarithme ieder Zahl zwischen 1 und 10 grösser als 0, und kleiner als 1, also ein Bruch nach der Form 0, ... sein und daher ist 0 die Charakteristik für alle Zahlen von 1 bis 10. Aus dem nämlichen Grunde ist die Charakteristik aller Zahlen zwischen 10 und 100 keine andere als 1, und der Logarithme dieser Zahlen ein Bruch nach der Form 1, ... Eben so ist 2 die Charakteristik für alle Zahlen von 100 bis 1000; 3 aber die Charakteristik für alle Zahlen von 1000 bis 10000 ꝛc.

Da l. $\frac{1}{10}$ = — 1 und l. $\frac{1}{100}$ = — 2, so muß der Logarithme ieder Zahl zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$ kleiner sein als — 1, und grösser als — 2, also ein Bruch nach der Form — 1, ..., und daher ist — 1 die Charakteristik für alle Zahlen von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{100}$ ꝛc. Oder, da die Decimalbrüche mit den ganzen Decimalzahlen einerlei sind, aber negative Logarithmen haben, so muß auch die Charakteristik der Logarithmen für Decimalbrüche mit ienen für die ganzen Decimalzahlen einerlei, aber negativ sein.

Zusaz.

Hieraus folgt

1. Daß die Charakteristik allemal um eine Einheit kleiner ist, als die ganze Zahl Zahlzeichen hat. Oder überhaupt die Anzahl der Einheiten der Charakteristik für ganze Zahlen und Decimalbrüche wird durch die zunehmenden Decimalordnungen der ganzen Zahlen, und durch die abnehmenden Decimalordnungen der Decimalbrüche bestimmt. So gehört 7654 zu der dritten zunehmenden Decimalordnung, daher ist 3 die Charakteristik des

des dazu gehörigen Logarithmen. Eben diese Regel gilt, wenn auch an der ganzen Zahl noch ein Decimalbruch befindlich ist, wie z. B. 54302,46. Da diese Zahl zu der vierten zunehmenden Decimalordnung gehört, so ist 4 die Charakteristik des dazu gehörigen Logarithmen. Der Decimalbruch 0,0000452 gehört zu der 5ten abnehmenden Decimalordnung, daher ist — 5 die Charakteristik des dazu gehörigen Logarithmen.

Auch umgekehrt. Gehört zu einer Zahl 745629 ein Logarithme mit der Charakteristik + 4 oder — 4; so wäre die Zahl im ersten Falle 74562,9; im zweiten 0,000745629.

2. Daß ein Logarithme, der für eine Zahl gehöret, welche mit bestimmten Zahlzeichen bezeichnet ist, auch für eine Menge anderer Zahlen in eben dem Systeme gehöre, welche mit eben diesen Zahlzeichen bezeichnet werden; nur daß seine Charakteristik geändert wird, wenn das höchste Zahlzeichen in den andern Zahlen zu einer andern Decimalordnung gehört. So gehört für die Zahlen 5678; 567,8; 56,78; 5,678, 0,5678; 0,05678 u. s. w. einerlei Logarithme, nur mit folgender veränderten Charakteristik 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 ꝛc. Und so auch umgekehrt.

§. 176. In einem ieden logarithmischen Systeme, dessen Basis eine positive ganze Zahl ist, sind Logarithmen negativer Zahlen unmögliche oder eingebildete Grössen oder Zahlen.

Beweis.

Es sei a die Basis, so ist es unter diesen Bedingungen unmöglich irgend einen Logarithmen n zu finden, so daß a^n eine negative Zahl werde; weil a^n positive ganze, oder gemischte Zahlen, und a^{-n} positive ächte Brüche, folglich

niemals negative Zahlen giebt, in welchem Falle erst n der Logarithme einer negativen Zahl wäre (§. 171.).

Zusaz.

Kommen in der Anwendung negative Zahlen vor, deren Logarithmen verlangt werden, so sehe man sie so lange als positiv an, bis die Logarithmen bestimmt sind, und beurtheile alsdenn nach den Umständen der Sache, welches Zeichen die, durch die Logarithmen gefundenen Zahlen, erhalten müssen.

Von der Einrichtung der logarithmischen Tafeln und dem Gebrauche derselben.

Aufgaben.

§. 177. Die Logarithmen der Zahlen unsers Zahlensystems zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man interpolire nach §. 169. die geometrische Progression, deren Grundverhältnis 1 : 10 ist, und so auch die damit verbundene arithmetische Progression.

	a^0	$a^{\frac{1}{4}}$	$a^{\frac{2}{4}}$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^1	$a^{\frac{5}{4}}$	$a^{\frac{6}{4}}$	$a^{\frac{7}{4}}$	a^2	. .
	1	$10^{\frac{1}{4}}$	$10^{\frac{2}{4}}$	$10^{\frac{3}{4}}$	10	$10^{\frac{5}{4}}$	$10^{\frac{6}{4}}$	$10^{\frac{7}{4}}$	10^2	. .
Log.	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	2	. .

Denn es ist $\sqrt{1 . a} = \sqrt{a} = a^{\frac{2}{4}}$; $\sqrt{a^{\frac{2}{4}}\, a^1} = \sqrt{a^{\frac{6}{4}}} = a^{\frac{3}{4}}$ 2c. Eben so $\sqrt{1 . 10} = 10^{\frac{2}{4}}$; $\sqrt{10^{\frac{2}{4}} . 10} = \sqrt{10^{\frac{6}{4}}} = 10^{\frac{3}{4}}$ 2c. Oder die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 1 und 10 ist $\sqrt{1 . 10} = \sqrt{10}$. Und $1 : \sqrt{10} = \sqrt{10} : 10$. Und eben so die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Logarithmen 0 und 1, nämlich $0 - \frac{0+1}{2} = \frac{0+1}{2} - 1$, oder $0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1$.

Daher

Daher kann man uun $\sqrt{10}$ zwischen 1 und 10 in die geometrische Progression sezen, und es gehört alsdenn diesem Gliede in der arithmetischen das Glied $\frac{1}{2}$ zu als sein Logarithme, den man auch wegen des folgenden als einen Decimalbruch schreiben kann. Also anstatt $\frac{1}{2}$ seze man 0,5. Folglich wäre nun die Progression

	1.	$\sqrt{10}$.	10	. . .
Log.	0.	0,5.	1	. . .
oder	1.	3,1622777 . . .	10	. .
Log.	0.	0,5.	1	. .

1. Zusaz.

Durch fortgeseztes Interpoliren ist es möglich die Logarithmen der Primzahlen zu finden. Hier wird es gnügen in einem Beispiele zu zeigen, wie mühsam dieser Weg ist, die Logarithmen zu finden. Soll man z. B. für 5 den zugehörigen Logarithmen finden, so sucht man $\sqrt{1 \,.\, 10} = 3,162277 \ldots$ Weil $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{10} = \sqrt{10^{\frac{2}{4}}}$, so ist der zu der gefundenen Zahl gehörige Logarithme $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$. Da aber 5 zwischen $10^{\frac{1}{2}} = 3,162277 \ldots$ und 10 enthalten ist; so suche man aufs neue $\sqrt{10 \,.\, 3,162277} \,.\, = 5,623413$. Für diese Zahl, welche $= \sqrt{10 \,.\, 10^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{10^{\frac{3}{2}}} = 10^{\frac{3}{4}}$ ist, kann man den Logarithmen $\frac{3}{4} = 0,75$ sezen. Da nun 5 zwischen 3,162277 . . und 5,623413 d. i. zwischen $10^{\frac{1}{2}}$ und $10^{\frac{3}{4}}$ liegt, so sucht man $\sqrt{10^{\frac{1}{2}} \,.\, 10^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{10^{\frac{5}{4}}} = 4,216965 \ldots$ Davon ist der Logarithme $\frac{5}{8} = 0,625$, weil $\sqrt{10^{\frac{5}{4}}} = 10^{\frac{5}{8}}$.

Sezt man dies Verfahren fort die mittlere geometrische Proportionalzahl zu 2 bereits gefundenen Zahlen zwischen welchen 5 liegt, zu suchen, und die gebrochenen Exponenten iedesmal für die Logarithmen der auf diese Art gefundenen Zahlen anzunehmen und in Decimalbrüchen auszudrüken: so erhält man endlich eine Zahl 5,000000 . . . d. i. die von 5 um kein Milliontheilchen mehr verschieden ist,

ist, und ihren zugehörigen Logarithmen findet man ebenfalls bis auf die 7te Decimalstelle = 0,6989700.

2. Zusaz.

Auf diesem mühsamen Wege haben verschiedene Mathematiker des vorigen Jahrhunderts logarithmische Systeme zum vortheilhaften Gebrauche berechnet, und in Tabellen gebracht, welche daher auch den Namen logarithmische Tabellen oder Tafeln erhalten haben. Jezt lehrt die Rechnung des Unendlichen kürzere Wege zur Berechnung der Logarithmen.

3. Zusaz.

Die Differenzen derienigen Zahlen, welche grösser als 1000 und um 1 oder noch weniger von einander verschieden sind, sind den Differenzen ihrer Logarithmen, wenigstens bis in die 7te Decimalstelle, ziemlich genau proportionirt, und zwar desto genauer, ie mehr die Zahlen grösser als 1000 sind.

Denn es ist z. B. die Differenz

log.	1060	=	3,0253059	
				0,0004095
—	1061	=	3,0257154	
				0,0004091
—	1062	=	3,0261245	
				0,0004088
—	1063	=	3,0265333	
				0,0004083
—	1064	=	3,0269416	

Noch genauer ist z. B. die Differenz

log.	9995	=	3,9997828	
				0,0000434
—	9996	=	3,9998262	
				0,0000435
—	9997	=	3,9998697	
				0,0000434
—	9998	=	3,9999131	
				0,0000435
—	9999	=	3,9999566	

Anmerkung.

Johann Neper, Baron von Merchiston, ein Schottländer, kam auf den Gedanken, durch Vergleichung der Eigenschaften einer geometrischen und arithmetischen Progression, zwei dergleichen Progressionen so mit einander zu verbinden, daß ie-

des

des Glied der einen, das gleichnamige Glied der andern bestimmte. Er nahm bei der Berechnung seiner Tafeln die Voraussezung an, daß l. 10000000 = 0 und l. 9999999 = 1; so daß seine Hauptprogression eine abnehmende wird, deren Exponent $\frac{9999999}{10000000}$ ist. Daher werden nach diesen Voraussezungen die Logarithmen aller Zahlen, welche grösser als 10000000 sind, negativ: die Logarithmen der Brüche aber positiv. Seine Tafeln sind unter dem Titel: Mirifici canonis logarithmorum Descriptio zu Edimburg im Jahre 1614 herausgekommen.

Just Byrgius, ein Schweizer, machte beinahe zu gleicher Zeit mit Nepern logarithmische Tafeln bekannt. Die Verfertigung der Byrgischen Tafeln soll sogar um mehrere Jahre älter sein, als die Bekanntmachung der Neperischen ist; so daß also die Erfindung der Logarithmen den Deutschen zugehört. Man findet davon nähere Nachricht in des Hrn. Prof. Scheibels Einleit. zur mathematischen Bücherkenntnis im X. Stük p. 444., und in des Hrn. Hofr. Kästners Fortsezung der Rechenkunst. 1786. p. 95.

Stiefel, ein königsbergischer Mathematiker, verglich ebenfalls in seinem Buche: Arithmetica integra, Nürnberg 1544. die geometrischen mit den arithmetischen Progressionen, und zwar noch früher als iene. Dadurch beweist er, daß er zwar Kenntnisse von den Logarithmen gehabt, dieselben aber nicht zu benuzen gewußt habe.

Da die Neperschen Tafeln, wegen der angeführten Voraussezungen beim Gebrauch unbequem wären: so wählte Heinrich Brigg, Prof. der Geometrie zu Oxford, auf Nepers Rath das im §. 174. angegebene System, und berechnete darnach die Logarithmen, welche er in seiner, im Jahre 1624 herausgegebenen Arithmetica logarithmica bekannt machte. Seine Tafeln enthalten die Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 20000, und überdem von 90000 bis 100000, und zwar bis auf die 14te Decimalstelle berechnet. Man findet diese Briggischen Logarithmen auch in der Trigonometria britanica, die Heinrich Gellibrand im Jahre 1633 zu Gaudan herausgegeben hat. Adrian Vlacq, ein Holländischer Mathematiker, ergänzte nachher die Logarithmen von 20000 bis 90000, wobei er aber nur bis auf die 10te Decimalstelle rechnete und sie in der von ihm im Jahre 1628 herausgegebenen Arithmetica logarithmica Briggii bekannt machte. Da diese Briggischen Logarithmen vollständig, und zwar nach einem bequemen Systeme berechnet sind: so hat man sich derselben fast allge-

allgemein bedient, und daher nennt man sie auch die gemeinen Logarithmen, und das zum Grunde gelegte System, das gemeine logarithmische System.

Zu den ersten Uebungen, besonders für Infanterie- und Kavallerieofficiere, in logarithmischen Rechnungen, sind die zu Ende der Arithmetik angehängten logarithmischen Tafeln hinlänglich, wozu auch die bekannte Wolfische Ausgabe unter dem Titel: Zu der Trigonometrie und Ausziehung der Wurzeln nöthige Tafeln rc. Halle 1772, und die Blacqsche mit einem deutschen Titel und Einleitung von Johann Jac. Hentschen. Frankf. und Leipzig 1767. gehören. Sie enthalten die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000. Wer sich aber über die Anfangsgründe der Mathematik etwas tiefer in dieselbe arbeiten will, muß sich mit einer vollständigern Ausgabe versehen. Die vorzüglichsten sind folgende:

Sherwins Mathematical Tables, contriv'd after a most comprehensiv Method. Von Sherwin veranstaltet und von Gardiner bei neuern Ausgaben berichtiget. Die dritte Ausgabe dieser Tafeln ist zu London 1742 veranstaltet, welche der vierten Ausgabe von 1761 an Korrektheit vorzuziehen ist. Im Jahre 1770 erschien zu Avignon eine ähnliche franz. Ausgabe: Tables des Logarithmes publiées cidevant en Angleterre par. M. Gardiner. Unter den deutschen grössern Ausgaben empfiehlt sich folgende: Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin 1778. 2 Bände in gr. 8. Vorzüglich aber: Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, von Georg Vega, Unterlieutnant und Lehrer der Mathematik beim K. K. 2ten Feld-Artillerie Regimente. Wien 1783. Diese Vegaischen Tafeln sind nicht nur die korrektesten, sondern auch die wohlfeilsten unter den grössern Ausgaben. (Preis 1 Thlr. 8 Gr.) Die Fehler der übrigen angeführten Ausgaben sind in diesen Tafeln angezeigt, und man kann daher vermittelst dieser Ausgabe jene verbessern.

Die übrigen Tafeln, welche ebenfalls in dieser und den vorhin genannten Ausgaben enthalten und zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlich geworden sind, werden im folgenden erwähnt werden.

In den kleinen Tafeln sind die Logarithmen der meisten Zahlen nur bis auf 7 Decimalstellen angegeben, so daß die 7te um 1 vermehrt worden, wenn die darauf folgende 8te über 5 war, weil diese 7 Decimalstellen in den meisten Fällen Genauigkeit genug gewähren. Ja man kann in der Ausübung sogar nach Umständen noch weniger von diesen Decimalstellen nehmen. Uebrigens enthalten fast alle diese Tafeln eine kurze Anweisung, woraus man den Gebrauch hinlänglich erlernen kann.

§. 178. Den logarithmen einer Zahl, welche in den gemeinen logarithmischen Tafeln nicht enthalten ist, zu finden.

Auflösung.

Es sei z. B. die Zahl 4578962.

1. Man theile diese Zahl von der Rechten gegen die Linke mit einem Komma, so daß die höchsten 4 Zahlzeichen allein zu stehen kommen, also 4578,962; so ist dies eben so viel als wenn man die Zahl durch 1000 dividirt hätte.

2. Nun nehme man in den Tafeln die Logarithmen von 4578 und von 4579 und suche die Differenz, nämlich:

$$\begin{array}{r} \mathrm{l}.\,4579 = 3{,}6607706 \\ \mathrm{l}.\,4578 = 3{,}6606758 \\ \hline \text{Die Differenz} = 948 \end{array}$$

3. Da nun die gegebene Zahl 4578,962 zwischen 4578 und 4579 enthalten ist: so schliesse man nach §. 177. Zus. 3. wie sich die Differenz der Zahlen 4578 und 4579, das ist 1, zu der Differenz der Zahlen 4578 und 4578, 962, das ist 0,962 verhält: eben so verhält sich die Differenz der Logarithmen iener Zahlen, das ist 948 Zehnmilliontheilchen, zu der Differenz der Logarithmen von diesen.

Oder

```
Oder   1 : 0,962 = 0,0000948 : x
                      0,962
                      -----
                       1896
                      5688
                     8532
                 ------------
                 0,0000911976
```

4. Nun addirt man die 911 Zehnmilliontheilchen zu dem nächst kleinern Logarithmen, und man erhält

```
      l . 4578 = 3,6606758
                     + 911
                 ---------
  l . 4578,962 = 3,6607669
```

5. Endlich vermehrt man die Charakteristik um so viele Einheiten, als man Zahlzeichen zur Linken durch das Komma abgesondert hat, nämlich um 3,

```
so ist l . 4578,962 = 3,6607669
                          + 3
       ------------------------
       l . 4578962  = 6,6607669
```

1. Zusaz.

Hieraus sieht man, daß der Logarithme einer Zahl, die nicht aus mehr als 4 Zahlzeichen besteht, in den Tafeln gefunden werden könne. Auch kann man, wenn die gegebene Zahl mehr als 4 Zahlzeichen hat, wie im §. dieselbe in Faktoren zerlegen und die Logarithmen der Faktoren zusammen addiren: so ist die Summe dieser Logarithmen, der Logarithme der gegebenen Zahl *).

Zu

*) Die der Arithmetik angehängten Logarithmentafeln enthalten die gemeinen Logarithmen der Zahlen nur von 1 bis 1000, bei welchen also der in §. 177. 3. Zusaz vorgetragene Saz noch weniger seine völlige Richtigkeit hat. Die Aufgaben §. 178. bis 182. beziehen sich auf Tafeln, welche die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthalten. Da man sich der angehängten kleinen Tafeln auf ähnliche Art wie der grössern bedienen kann: so wird ein

Zu diesem Geschäfte sind die oben angeführten Tabellen der Primzahlen zu empfehlen.

2. Zusaz.

Besteht die gegebene Zahl aus mehr als 8 Zahlzeichen, und man soll den dazu gehörigen Logarithmen suchen, so sondert man, wie vorhin, die höchsten 4 Zahlzeichen ab, für welche man den Logarithmen in den Tafeln nach der im §. gegebenen Anleitung finden kann, und nimmt bei der Proportion nach n. 3. im §. nur die hinter dem Komma stehenden höchsten 4 Zahlzeichen in die Rechnung, weil man, wenn sie auch alle genommen würden, doch

ein ieder die dabei vorkommenden Rechnungen nach diesen Tafeln ohne weitern Unterricht, von selbst einsehen. In sehr vielen Fällen, besonders in der Anwendung hat der Infanterie- und Kavallerieofficier Grössen zum Gegenstande, die er ohne Hülfe der Logarithmen bestimmen muß. In andern Fällen aber werden die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 für denselben hinreichend sein, Berechnungen vermittelst derselben in der Theorie durchzuführen. Ohne alle Kenntnis der Logarithmen und ihren Gebrauch ist es unmöglich, sich auch nur mit den ersten Gründen derienigen Theorien der Mathematik bekannt zu machen, die diese Kenntnisse der Logarithmen voraussezen.

Da der Infanterie- und Kavallerieofficier bei Berechnungen, die bei der Erlernung der Kriegswissenschaften häufig vorkommen, die Längen größtentheils nach Schritten bestimmt: so wird es vortheilhaft sein, grosse Zahlen, nach Art des ersten Zusazes im §. 178., in Faktoren zu zerlegen, wovon keiner mehr als drei Zahlzeichen enthält. Die Logarithmen solcher Faktoren sind in den angehängten Tafeln enthalten. Werden die Logarithmen dieser Faktoren addirt: so ist die Summe derselben der Logarithme des Produkts oder der gegebenen Zahl.

Dies Verfahren macht in vielen Fällen mühsame Berechnungen entbehrlich, und dies muß, neben der besten Kenntnis der Theorie, ein Hauptaugenmerk für den Officier sein.

doch immer einerlei Differenz erhalten müßte, da die Logarithmen nur bis auf 7 Decimalstellen richtig sind. Nach geendigter Rechnung nimmt man die aus der Acht gelassenen Zahlzeichen dazu, und giebt der Charakteristik eine Einheit weniger, als man Zahlzeichen überhaupt in der gegebenen Zahl hat (§. 175. Zus. 1.) So ist der Logarithme der Zahl 35785948375 = 10,5537125.

§. 179. **Den Logarithmen eines ächten Bruches zu finden.**

Auflösung.

1. Man suche in den Tafeln den Logarithmen vom Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs. Findet man sie nicht, so müssen sie nach §. 178. gesucht werden.
2. Nun subtrahire man den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers: so zeigt die Differenz den Logarithmen des gegebenen Bruchs an. §. 173. Zus. 1.
3. Wäre der gegebene Bruch ein Decimalbruch, so subtrahirt man ebenfalls den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers. Der Logarithme des Nenners ist allemal der Logarithme derienigen Potenz von 10, welche den Nenner des Bruchs angiebt.

Beispiele.

Es sei der Bruch $\frac{5}{7}$ gegeben, so ist $l.\frac{5}{7} = l.5 - l.7 = 0,6989700 - 0,8450980 = -0,1461280$. Soll der Logarithme von 0,1064 gesucht werden, so hat man $l.1064 - l.10^4 = 3,0269416 - 4,0000000 = -0,9730584$.

In zusammengesezten Rechnungen ist es größtentheils vortheilhafter, die Differenz der beiden Logarithmen blos anzuzeigen, und nicht berechnet anzugeben. So würde man im vorigen Beispiel 0,1064 sezen $l.3,0269416 - 4$; nur muß man alsdenn den negativen Theil in der Rech-

Rechnung behandeln, wie man überhaupt mit negativen Grössen umgeht.

Zusaz.

Auch kann man den gegebenen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, so hat man nur einen Logarithmen in den Tafeln zu suchen nöthig. Dieses Verfahren ist in den Fällen vortheilhaft, wenn der gemeine Bruch in einen eben so grossen Decimalbruch völlig genau, und zwar unter 8 Decimalstellen, verwandelt werden kann, wie z. B. $\frac{3}{5} = 0,6$. Alsdenn ist der verlangte Logarithme $= 0,7781513 - 1$. Bei Brüchen hingegen, welche durch eine Reihe Decimalstellen ohne Ende ausgedrükt werden, wie z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ rc. findet man den Logarithmen genauer, wenn man sie als gemeine Brüche behandelt.

§. 180. Den Logarithmen einer gemischten Zahl zu finden.

Auflösung.

1. Man richte die gemischte Zahl ein und verfahre wie in §. 179. So ist z. B. $l.\,34\frac{3}{4} = l.\,\frac{139}{4} = l.\,139 - l.\,4 = 1,5409548$ oder $l.\,34,75 = l.\,3475 - l.\,100 = 1,5409548$.
2. Ist der Zähler oder Nenner, oder beide zugleich, grösser als die in den Tafeln enthaltenen Zahlen, für welche die Logarithmen berechnet sind: so verfahre man nach §. 178.

§. 181. Die einem gegebenen positiven Logarithmen zugehörige Zahl zu finden.

Auflösung.

1. Findet man den gegebenen Logarithmen genau in den Tafeln unter der Charakteristik 3., (weil nämlich die Logarithmen aller Zahlen, wenn man auf die Charak-

teristik nicht Rücksicht nimmt, welche zwischen 1 und 1000 liegen, auch unter den Logarithmen der Zahlen zwischen 1000 und 10000 wieder vorkommen, aber nicht umgekehrt); so ist die dabei stehende Zahl die gesuchte, z. B. 3,4750898 = l. 2986.

2. Ist die Charakteristik des gegebenen Logarithmen kleiner als 3, also 2, 1 oder 0; so muß man die nach n. 1. gefundene Zahl, im ersten Falle mit 10, im zweiten mit 100, und im dritten mit 1000 dividiren, d. i. von dieser Zahl, von der Rechten gegen die Linke eins, zwei oder drei Zahlzeichen wegnehmen. Die zur Linken bleibende Zahlzeichen drüken Ganze, die zur Rechten aber Decimaltheile aus. Z. B. 1,4421661, so steht derselbe unter der Charakteristik 3. in den Tafeln bei der Zahl 2768, daher ist die dazu gehörige Zahl 27, 68. Eben so 0,6620019, und die dazu gehörige Zahl ist 4,592.

3. Wäre hingegen die Charakteristik des gegebenen Logarithmen grösser als 3, so muß man der dazu gehörigen Zahl in den Tafeln noch rechter Hand so viele Nullen beifügen als die Charakteristik mehr als drei Einheiten enthält. Z. B. 6,8741918 = l. 7485000. Denn es ist 6,8741918 = 3,8741918 + 3 = l. 7485 . 1000 = l. 7485000.

4. Wäre endlich der gegebene Logarithme z. B. 4,5639462 nicht genau in den Tafeln unter der Charakteristik 3 enthalten, so giebt der nächst kleinere Logarithme der Zahl 3663 von dem gegebenen subtrahirt, ohne auf die Charakteristik zu merken, die erste Differenz, nämlich 1093, und von dem nächst grössern l. 3664 subtrahirt die zweite Differenz 1186. Also 1186 : 1 = 1093 : x, und es ist x = 0,922, welche man der Zahl 3663 beifügt, und 3663922 zur gesuchten Zahl erhält. Nun schneidet man von dieser Zahl gegen die Rechte zu so viele Zahlzeichen ab, als die Charakteristik des gegebenen Logarithmen

men Einheiten enthält, um Eins vermehrt. So ist $4,5639462 = l.\,36639,22$, und $0,5639462 - 3 = l.\,0,003663922$ ꝛc.

§. 182. Die zu einem gegebenen negativen Logarithmen, gehörige Zahl zu finden.

Auflösung.

Man suche den gegebenen Logarithmen in den Tafeln so auf, als wenn derselbe positiv wäre, so ist die dazu gehörige Zahl der Nenner, und 1 der Zähler eines gemeinen Bruchs, den man nach Gefallen auch in einen Decimalbruch verwandeln kann.

So ist z. B. $- 3,8070612 = l.\,\frac{1}{6413}$.

Verlangt man sogleich einen Decimalbruch, so addire man zu dem negativen Logarithmen eine solche ganze Zahl, daß dadurch eine positive Summe entsteht. Zu diesem nun positiv gewordenen Logarithmen suche man nach den gegebenen Regeln die gehörige Zahl und dividire dieselbe mit einer Potenz von 10, deren Exponent der, dem negativen Logarithmen zuaddirten Zahl gleich ist.

So ist z. B. $- 3,6253124 = \overset{+\,4}{-}\, 3,6253124 - 4 = (+\,4,0000000 - 3,6253124) - 4 = 0,3746876 - 4 = l.\,0,0002369661 = l.\,\frac{1}{4220}$.

Dritter Abschnitt.

Praktische Rechnungsregeln,

aus

denienigen Theorien hergeleitet,

welche

die dazu erforderlichen Gründe

enthalten.

I.

Anwendung der Lehre von den arithmetischen Proportionen.

Aufgabe.

§. 183.

Aus 2, 3 und mehrern gegebenen Zahlen, den mittlern Werth oder das Mittel derselben zu finden.

Auflösung.

Man addirt die gegebenen Zahlen, und dividirt die Summe durch die Zahl, die angiebt, wie groß die Anzahl der gegebenen ist. Sind z. B. 48 und 128 die gegebenen Zahlen, so ist der mittlere Werth $= \frac{48 + 128}{2} = 88$.

Der Beweis liegt in §. 146.

Anmerkung.

Dieser Aufgabe bedient man sich vorzüglich dann, wenn von einerlei Grösse mehrere Werthe angegeben werden, worunter man keinen zu wählen Grund hat. Durch dies Verfahren

fahren aber findet man einen Werth, der von der Wahrheit nicht weit abweichen kann.

Anwendung in Beispielen.

Ein Muſketier- oder Füſilierſchießgewehr trägt nach Verſuchen auf folgende Weiten. Das 1ſte mal auf 150 Schritte, das 2te mal auf 230, das 3te mal auf 180 Schritte. Die mittlere Schußweite iſt alſo $= \frac{150 + 230 + 180}{3}$ $= 186\frac{2}{3}$ Schritte *).

Hätten 5 Regimenter in einer Bataille folgende Mannſchaft verloren, nämlich das Regiment A 260 Mann, B 325, C 150, D 60, E 300, und man ſollte den Verluſt der Regimenter ſo angeben, daß er bei dem einen ſo groß wie bei dem andern wäre: ſo müßte man das Mittel ſuchen, d. i. man ſucht den Verluſt eines ieden Regiments im Durchſchnitte.

$$\frac{A = 260 + B = 325 + C = 150 + D = 60 + E = 300}{5}$$ $= 219$ Mann.

Sollten nun die Regimenter gleich ſtark bleiben, ſo müßte das Regiment B $325 - 219 = 106$ Mann, E $300 - 219 = 81$ Mann von den übrigen Regimentern, die weniger gelitten, erſezt bekommen.

*) Je öfters ein Gewehr probirt worden, ie mehr man alſo Schußweiten erhalten hat, deſto richtiger kann die mittlere Schußweite deſſelben darnach beſtimmt werden. Für die Beſtimmung der wirkenden Kraft der Infanterieſchießgewehre iſt die Unterſuchung der Schusweiten von groſſem Nuzen. In der Geſchüzwiſſenſchaft kommen Reſultate ſolcher Unterſuchungen vor, wobei die Berechnung der mittlern Schusweiten als bekannt angenommen werden wird. Uebrigens begreift man von ſelbſt, daß dergleichen Berechnungen auch bei der Unterſuchung der Kavallerie und Artillerie vorkommen.

Anmerkung.

In der Oekonomie kommt die Berechnung des Durchschnitts unter andern bei Verpachtungsanschlägen und dergleichen vor.

2.

Anwendung der Lehre von den geometrischen Proportionen.

Erklärung.

§. 184. Die Anwendung der Regel des 84. u. 149. §s, nach welcher man zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl sucht, wird die Regel Detri, auch ihres ausgebreiteten Nuzens wegen die Güldene Regel genannt. Sie wird angewendet 1) wenn eine Grösse mit einer andern in gleichem Verhältnisse zu- und abnimmt, wie z. B. Waaren und ihre Preise, 2) wenn eine Grösse völlig genau so vielmal ab- als eine andere zunimmt, z. B. Zeit und Anzahl der Arbeiter. Im ersten Falle heißt diese Regel gerade Regel Detri; im andern Falle aber umgekehrte Regel Detri. Beide können übrigens einfach, aber auch zusammengesezt sein, ie nachdem eine oder mehrere geometrische Proportionen in der Aufgabe enthalten sind.

Anmerkung.

Jede zusammengesezte Rechnungsregel läßt sich zulezt als eine einfache behandeln, sobald die gegebenen Zahlen gehörig geordnet sind.

A.

A.

Die einfache gerade und umgekehrte Regel Detri.

Aufgabe.

§. 185. Eine Rechnungsfrage, welche vermittelst der einfachen geraden und umgekehrten Regel Detri aufgelößt werden kann, richtig in Ansaz zu bringen, und dann die gesuchte vierte Zahl, oder das sogenannte Facit zu finden.

Auflösung.

1. Man ordne die gegebenen Zahlen nach der im vorigen §. angegebenen Ordnung, d. i. man seze die Fragezahl in die Stelle des zweiten, und diejenige, die mit ihr von einerlei Art ist, in die Stelle des ersten, die noch übrige Zahl aber, in die Stelle des dritten Gliedes. Die Stelle des vierten Gliedes bezeichnet man mit x.

2. Gehört die Aufgabe zu der geraden Regel Detri: so multiplicire man die beiden mittlern Glieder und dividire das Produkt durch das erste; so zeigt der Quotient die gesuchte vierte Zahl (§. 84. 149.).

Beispiel.

1 Pfund : 12 Pfund = 4 Rthlr. : x
12
1) 48 | 48 Rthlr.

Oder

3 Pfund : 48 Pfund = 6 Rthlr. : x
48
3) 288 | 96 Rthlr.

Anmerkung.

Nach dem gewöhnlichen Ansaze des gemeinen Lebens würden die vorigen Beispiele so gestellt werden:

1 Pfund kostet 4 Thlr., wieviel kosten 12 Pfund?
3 — — 6 — — — 48 —

Da das Facit mit dem nach der Theorie gefundenen, vermöge des 149. §s, einerlei ist: so ist es gleichgültig, welchen Ansaz man wählet.

3. Gehört die Aufgabe zu der umgekehrten Regel Detri, so verwechsle man die beiden ersten Glieder, und verfahre wie in N. 2.

Beispiel.

Zu einer Verschanzung werden 120 Mann erfordert, wenn man in 6 Monaten mit der Arbeit zu Ende sein will: wieviel Mann hat man nöthig, um mit demselben Baue in 2 Monaten fertig zu sein.

2 Monat? : 120 Mann = 6 Monate : x
6
2) 720 | 360 Mann.

Anmerkung.

Weil die Fragezahl nun Divisor wird, so giebt die doppelte Fragezahl ein halb so grosses, die 3, 4mal grössere, auch ein 3, 4mal kleineres Facit; umgekehrt: die kleinere Fragezahl ein in dem nämlichen Verhältnisse grösseres Facit. Die Hauptregel bei der Auflösung aber bleibt dieselbe, die man bei der geraden Regel Detri nöthig hatte.

1. Zusaz.

Wenn einige, oder alle von den gegebenen Zahlen verschiedene Namen haben, so kann man allemal 2 derselben nach §. 77. u. 78. auf einerlei Benennung bringen, indem man die grössere durch Einheiten der kleinern, oder die kleinere durch einen ächten Bruch ausdrükt, der mit der grössern Zahl einerlei Namen hat. Mit diesen Zahlen geht

geht man alsdenn um, wie man sonst mit Brüchen oder gemischten Zahlen umgeht.

Beispiele.

1 Loth : 4 Loth 2 Quentchen = 13 Rthlr : x

also entweder

4 Quentchen : 18 Quentchen = 13 Rthlr. : x

oder 1 Loth : $4\frac{1}{2}$ Loth = 13 Rthlr. : x

In beiden Fällen findet man einerlei Facit, nämlich $58\frac{1}{2}$ Rthlr. = 58 Rthlr. 12 Gr.

2. Zusaz.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn die Zahl im dritten Gliede unter verschiedenen Namen ausgedrükt ist, nämlich

4 Loth 2 Quentchen : 1 Loth = 58 Rthlr. 12 Gr. : x

also entweder

18 Quentchen : 4 Quentchen = 1404 Gr. : x

oder

$4\frac{1}{2}$ Loth : 1 Loth = $58\frac{1}{2}$ Rthlr. : x

oder

$\frac{9}{2}$ Loth : 1 Loth = $\frac{117}{2}$ Rthlr. : x

In jedem Falle findet man einerlei Facit, nämlich 13 Rthlr., nur in dem lezten Falle auf einem kürzern Wege, als in den vorhergehenden.

1. Anmerkung.

Auch kann man sich, wenn Brüche in den Gliedern vorkommen, folgende Regeln merken: 1. Wenn im ersten Gliede ein Bruch ist: so multiplicirt man das erste und zweite, oder auch das erste und dritte Glied mit dem Nenner des Bruchs. 2. Enthält das zweite Glied einen Bruch: so multiplicirt man dieses und das erste Glied mit dem Nenner desselben. 3. Ist endlich im dritten Gliede ein Bruch vorhanden: so schaft man denselben weg, wenn man dieses und das erste Glied mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt. Sollten alle 3 Glieder Brüche enthalten: so müßte man dieselben auf einerlei Benennung bringen, und

und dann kann man die daraus erhaltenen Zahlen wie ganze Zahlen behandeln.

2. Anmerkung.

Zu vortheilhaften Abkürzungen, wenn grosse Zahlen in Rechnungen vorkommen, kann man, anstatt der Zahlen, mit den Logarithmen derselben rechnen, da man alsdenn nur nöthig hat, die Logarithmen des zweiten und dritten Gliedes zu addiren, und von der Summe derselben den Logarithmen des ersten Gliedes zu subtrahiren. Die gefundene Differenz ist der Logarithme des vierten Gliedes, bei welchem man in den Tafeln die dazu gehörige Zahl entweder findet, oder durch Hülfe des bei den Logarithmen angegebenen Verfahrens berechnet.

3. Zusaz.

Nachdem man die Glieder auf einerlei Benennung gebracht hat, wofern sie nicht einerlei Benennung hatten: so kann man, wenn es angeht, das erste und zweite, oder auch das erste und dritte Glied mit einerlei Zahl dividiren, wie im vorhergehenden schon geschehen, und man kürzt auch hier die Rechnung merklich ab, ohne daß der Werth der vierten oder gesuchten Proportionalzahl geändert wird (§. 141.). So sind in dem Ansaze $96 : 408 = 72 : x$ folgende Abkürzungen möglich. $(96 : 8) : (408 : 8) = 72 : x$. d. i. $12 : 51 = 72 : x$; auch $(12 : 4) : 51 = (72 : 4) : x$, d. i. $3 : 51 = 18 : x$; oder $(3 : 3) : 51 = (18 : 3) : x$, d. i. $1 : 51 = 6 : x$, wo also $x = 51 . 6 = 306$ ist *).

4. Zusaz.

Unter die brauchbarsten Beispiele von der Anwendung der einfachen Regel Detri gehören die Reduktionen einer

*) Diese und ähnliche Abkürzungen, die aus der Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen hergeleitet sind, werden insgemein, besonders von Kaufleuten, die welsche Praktik genannt, von welcher man in Rechenbüchern über die praktische Rechenkunst mehr Nachricht findet.

ner Zahl auf eine andere Benennung, wovon unten §. 76-78. schon einige Beispiele von einer ganz einfachen Reduktion gegeben sind. Die Reduktion der Gewichte und der Längenmaasse sind die vorzüglichsten, die hier erwähnt werden müssen, weil niemand ohne die Kenntnis derselben, in der angewandten Mathematik, und also auch in den verschiedenen Theilen der Kriegswissenschaften fortkommen kann. Zu dieser Absicht muß man sich mit Reduktionstafeln und ihrem Gebrauche bekannt machen. Da aber die Verschiedenheit der Gewichte und Längenmaasse an verschiedenen Oertern zu groß ist: so muß man sich begnügen diese Verhältnisse von den merkwürdigsten Oertern zu wissen, vermöge welcher man leicht besondere Gewichte und Längenmaasse einzelner Oerter untersuchen und prüfen kann.

5. Zusaz.

Bei der Vergleichung der Gewichte ist zu bemerken, daß das Handlungsgewicht, welches bei Waaren gebraucht wird, die nicht in zu hohen Preisen stehen, an den mehresten Orten noch vom Gold-, Silber- und Edelsteinengewichte, auch vom Apothekergewichte unterschieden ist. Ein Pfund Handlungs- oder Kramgewicht wird in 32 Loth, ein Loth in 4 Quentchen, ein Quentchen in 4 Pfenniggewichte getheilt. Des Köllnischen Markgewichts bedient man sich fast in ganz Deutschland beim Golde und Silber. Eine Mark Köllnisch wiegt $\frac{1}{2}$ Pfund.

Beim Silber wird diese Mark in 16 Loth oder 8 Unzen, ein Loth in 4 Quentchen, ein Quentchen in 4 Pfenniggewichte eingetheilt, daß also 1 Mark 256 Pfenniggewichte enthält. Beim Münzwesen wird eben dies Pfenniggewicht in 256 Richtpfenningstheile getheilt, so daß eine Mark Köllnisch 65536 Richtpfenningstheile, eine Unze Köllnisch 8192, ein Loth 4096, 1 Quentchen 1024 solcher Pfenningstheile wiegt.

Der Pfenning wird auch noch in 2 Heller getheilt, da denn 1 Heller 128 Richtpfenningstheile beträgt.

Auch theilt man beim Münzwesen ein Loth in 18 Grän, und ein Grän wiegt $227\frac{5}{9}$ Richtpfenningstheile.

Beim Golde wird die Mark in 24 Karat, 1 Karat in 12 Grän getheilt, also wiegt 1 Loth $1\frac{1}{2}$ Karat, und die Unze 3 Karat, oder 36 Grän; folglich die Mark 288 Grän, und ein Karat wiegt $2730\frac{2}{3}$ Richtpfenningstheile.

Auch sind bei den goldnen Münzen die sogenannten Dukatenäschen gewöhnlich, 17 dergleichen Aeschen wiegen 1 Pfenning, also 1 Quentchen 68 Aeschen, 1 Loth 272, 1 Unze 544, 1 Mark 4352 solcher Aeschen *).

Das Dänische Silbergewicht verhält sich zu dem eigentlichen Köllnischen wie $9776\frac{1}{17}$ zu 9728; ienes ist also $48\frac{10}{17}$ schwerer als dieses.

Uebrigens wird bei Münzen in Dännemark das eigentliche Köllnische Gewicht, die Mark zu 4352 Aeschen gebraucht **).

In

*) Hierüber sind nachzulesen des Herrn Schoapps Europäische Gewichtsvergleichung. Nürnberg 1722. Leupold hat daraus im Theatro Statico p. I. S. 77. u. f. einen Auszug mitgetheilt, nach welchem 1 Dukaten 64 Aeschen schwer sein soll. Sollen demnach 67 Stük Reichsgesezmässige Dukaten 1 Kölln. Mark schwer sein, so muß die Köllnische Mark 4288 Aeschen enthalten. In den vollständigen Tabellen von dem Verhältnis Herzogl. Meklenburg. Schwerinischer Courantmünze gegen andere Geldsorten Schwerin 1764. wird der Dukaten 65 Aeschen schwer angegeben. Eine Köllnische Mark müßte demnach 4355 Aeschen schwer sein, ob sie gleich in eben den Tabellen nur 4352 Aeschen angegeben wird.

**) Man kann ausser der Dänischen Münzverordnung nachlesen: Raisonirte Darstellung der neuen Schleswig-Holsteinischen Münz- und Bankeinrichtung. Im deutschen gemeinnüzigen Magazin im 1sten Vierteljahre des 2ten Jahrgangs Leipzig 1789. Auch findet man Vergleichungen des Gold- und Silbergewichts und Anwendungen auf gangbare Münzsorten

in

In England, Frankreich, Holland und an mehrern Orten bedient man sich beim Golde, Silber und Edelsteinen, des sogenannten Troygewichts, ob es gleich in diesen drei Ländern nicht von gleicher Schwere ist.

Ein Pfund holl. Troygewicht hat eigentlich 12 Unzen, obgleich in Holland 16 Unzen darauf gerechnet werden. Hiervon gehen 8 Unzen auf 1 Mark Troy, und 1 Pfund wiegt $1\frac{1}{2}$ Mark. Ferner wird die Unze in 20 Engels oder Deniers, 1 Engel in 32 As, oder statt dessen in 24 Grän getheilt, daher 3 Gräne 4 As ausmachen, und 1 Mark wiegt 5120 As oder 3840 Grän, 1 Unze 640 As oder 480 Troysche Gräne.

Die Köllnische Unze wiegt 19 solcher Engels, wovon 20 eine Unze holländisch Troy wiegen. Also ist 1 Kölln. Unze : 1 Unze holl. Troy = 19 : 20, und 19 Unzen holl. Troy sind = 20 Kölln. Unzen, mithin auch 19 Mark holl. Troy = 20 Mark Kölln. Daher wiegt die Köllnische Unze $\frac{19}{20} \cdot 640 = 19 \cdot 32 = 608$ As holl. Troy, und 1 Kölln. Pfenninggewicht von 15 Gran Köllnisch, oder 17 Dukatenäschen wiegen $\frac{608}{32} = 19$ As holl. Troy. Bei Edelsteinen theilt man die Troysche Unze in 150 Karat (welche von dem Karat beim Goldgewicht verschieden sind), also 1 Pfund von 16 Unzen = 2400 Karat.

Ein Pfund engl. Troygewicht wird in 12 Unzen, oder $1\frac{1}{2}$ Mark, die Unze in 20 Pennys, 1 Penny in 24 Grane getheilt, also 1 Mark von 8 Unzen in 3840 Gran, und 1 Unze wiegt 480 Gran.

Ausserdem ist bei der übrigen Handlung in England das Avoir du pois Gewicht gebräuchlich, welches leichter als Troygewicht ist. Das Pfund wird in 16 Unzen und dann

in und ausserhalb Deutschland gesammlet in Böttichers Statistischen Uebersichtstabellen aller Europäischen Staaten, nebst deren Münzen, Maassen und Gewichten. Königsberg und Leipzig 1789.

dann wie gewöhnlich eingetheilt *). Auch wird noch beim Verkauf mancher Waaren das Königsgewicht gebraucht, wovon 1 Pfund $1\frac{1}{2}$ Pfund Avoir du pois macht.

Ein Apothekerpfund enthält wie ein Pfund Troygewicht, 12 Unzen, 1 Unze 8 Drachmen oder Quentchen, 1 Drachme 3 Skrupel, 1 Skrupel 20 Gran, also hat die Unze 24 Skrupel oder 480 Gran.

In Frankreich ist beim Golde und Silber ebenfalls ein Markgewicht von 8 Unzen gewöhnlich: die Unze wird bis auf Skrupel, wie Apothekergewicht, eingetheilt, nämlich in 8 Gros oder Drachmes, 1 Gros in 3 Denier oder Scrupel. Hingegen wird 1 Denier in 24 Grains getheilt, also wiegt die Pariser Unze 576 Grains, und die Mark 4608 Grains. Das Pariser Apothekergewicht ist mit dem Gold- und Silbergewichte einerlei, nur wird die Unze bei dem Medicinalgebrauche in 480 Gran getheilt. Auch soll die deutsche Apothekerunze fast gerade so schwer sein, als die Venetianische Unze **).

In Constantinopel wird das Pfund (Cheky) in 100 Drachmen, 1 Drachme in 16 Kara oder Taint, deren iede 4 Gran enthält, getheilt, also das Pfund in 1600 Kara oder 6400 Grains.

In Copenhagen wird das Pfund in 16 Loth, 1 Loth in 4 Quentchen, 1 Quentchen in 4 Deniers, und 1 Denier in 2 Hellergewichte eingetheilt.

In

*) Man kann hierüber nachlesen: Robins neue Grundsäze der Artillerie, aus dem Engl. mit Erläuterungen von L. Euler. Berlin 1745.

**) Eisenschmid hat die Vergleichung dieser und der folgenden Gewichte selbst angestellt, und seine Nachrichten aus sichern Quellen geschöpft. Umständlich beschrieben findet man diese Vergleichungen in Io. Casp. Eisenschmidii de ponderibus et mensuris veterum Romanorum, Graecorum, Hebraeorum, nec non de valore pecuniae veteris, disquisitio, Augsburg 1737 (die zweite Ausgabe).

In Florenz hat das Pfund 12 Unzen, 1 Unze 24 Deniers, und 1 Denier 24 Grains.

In Lissabon ist das Pfund wie in Frankreich eingetheilt.

In Madrit wird die Mark in 8 Unzen, 1 Unze in 8 Huitains, 1 Huitain in 6 Tomins, 1 Tomin in 12 Gran getheilt: also hat die Mark 4608 Grane.

Das Neapolitanische Pfund (Rotolo), wird in den Schulzischen Tafeln 5271 Leipz. Gran, und von Herrn Artillerielieut. Hahn *) als ein Mittel aus verschiedenen Werthen, 5269 Gran angegeben.

In Rom enthält 1 Pfund 12 Unzen, 1 Unze 24 Deniers, und 1 Denier 24 Grains. Das Pfund ist nicht im ganzen Kirchenstaate einerlei, aber wohl die einzelnel Unze.

In Stokholm wird beim Viktualiengewicht das Pfund in 32 Loth (wovon 16 eine Mark geben), 1 Loth in 2 Halbloth (1 Halbloth hat 2 Quentchen), in $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ Loth getheilt.

In Turin hält das Pfund 12 Unzen schweres Gewicht, 1 Unze 24 Denar, 1 Denar 24 Gran, also das Pfund 6912 Gran.

Folgende Vergleichungstafel giebt die darin aufgeführten Gewichte nach von Clausberg in Granen, deren 7680 ein Leipziger Pfund machen, und nach Vega in Assen des holl. Troygewichts, 9728 aufs Pfund, an. Die in Klausberg fehlenden sind aus den Schulzischen Tafeln, und aus der Abhandlung in den Memoires de Paris 1767. Essai sur le rapport des poids etrangers avec le mars de france von Hahn ergänzt worden.

Tafel

*) In seiner vollständigen Anleitung zur niedern und höhern Mathematik rc. Suttgardt 1788.

Tafel
zur Vergleichung der Gewichte.

Ein Pfund in	Wiegt in Leipz. Granen	in Assen.
Achen	7710	9728
Amsterdam	8125	10279
Anspach	8375	10608
Antwerpen	7710	9697
Augsburger		
gros Gewicht	8088	10232
klein Gewicht	7776	9837
Bamberg	7976	10103
Basel	8054	10202
Bauzen	7130	9020
Bayreuth	8502	10770
Bergen in Norwegen	8201	10388
Bergen op Zoom	7816	9900
Berlin	7697	9748
Bern	8558	10840
Bologna	5958	7537
Bourdeaux	8085	10228
Braunschweig	7680	9716
Bremen	8100	10380
Breslau	6667	8434
Brüssel	7710	9697
Cadix	7560	9580
Calais	8376	10610
Cassel	5202	6589
Castilien	7563	9580
Cölln am Rhein	7680	9728
Constantinopel		
Ok	20865	26396
Cheky	5236	
Copenhagen	7716	10388
Cracau	6660	8426
Danzig	7163	9062
Dresden	7680	9716
Dublin	7434	9444
Edimburg	8079	10233
Eger	10136	12839

Ein Pfund in	Wiegt in Leipz. Granen	in Assen.
Erfurt	7754	9822
Erlangen	8375	10608
Florenz	5581	7273
Frankfurth am Main	7680	9720
Frankfurth an d. Oder	7688	9738
Freiberg	8815	11166
Genf,		
gros Gewicht	9075	11477
klein Gewicht		9564
Genua,		
klein Gewicht	5208	6720
gros Gewicht		7140
Haag	8125	10279
Halle	7697	9748
Hamburg	7980	10080
Hannover	7977	10129
Irland avoir du poids	8947	11333
Königsberg		
alt Gewicht	6255	7913
neu Gewicht	7695	9748
Leipzig	7680	9716
Leyden	9697	9697
Lindau	7555	9558*
Lion	6885	8840
Lissabon	7552	9560
Livorno	5605	7131
London avoir du poids	7434	9439*
Königsgewicht		14166
Lukka	5488	7746
Lübek	7950	10059
Lüneburg	8000	10125
Madrit	7563	9580
Magdeburg	7695	9748

Ein Pfund in	Wiegt in Leipz. Granen	in Assen.
Manheim	8130	10299
Mantua	5411	6854
Marseille	6803	8359
Mayland,		
libra grossa	12527	
libra piccola	5369	
Memmingen	8422	10655
Moskau	6720	8512
München	9225	11671
Namur	7736	9799
Neapolis	5269	6677
Norwegen	8201	10388
Nürnberg	8385	10610
Ofen	8075	10228
Palermo	5218	6610
Paris	8065	10202
Parma	5571	7056
Petersburg	6723	8512
Piemont	6118	7750
Pisa	5352	6779
Prag	8450	10690
Presburg	9171	11616
Ragusa	5968	7560
Regenspurg	9225	11671
Riga	6878	8701
Rom	5581	7345
Rußland	6720	8512
Salzburg	9210	11652
Sardinien	6587	8343
Schafhausen	7560	9564

Ein Pfund in	Wiegt in Leipz. Granen	in Assen.
Schottland, avoir du poids	7434	9444
Schweden,		
⸗ Viktualgewicht	6985	8848
⸗ Bergw. Gew.	6175	7822
⸗ Eisengewicht	5588	7078
Sicilien	5218	6610
Spanien	7563	9580
Speier	8375	10608
Strasburg	7755	schwer 10292 leicht 9812
Stuttgardt	7676	
Turin	6063	7680
Ulm	7710	9754
Venedig		
gros Gewicht	7845	9955
klein Gewicht	4959	6300
Verona		
gros Gewicht	8180	10350
klein Gewicht	5448	6924
Warschau		
gros Gewicht	6666	
klein Gewicht	6215	7863
Wien	9240	
⸗ ⸗ nach Vega	9215	11672*
Wittenberg	7659	9701
Würzburg	7836	9926
Zittau	7695	9735
Zürich	8693	10972

*) Die mit *) bezeichneten Asse sind aus **Krusens Hamb. Contoristen.** Hamburg 1766. Die Krusischen Zahlen treffen mit den von Clausbergischen nicht immer zusammen. Es scheint sich also die Voraussezung, daß das Leipziger Pfund um 12 As leichter als das Köllnische gewesen sei, welches der Herr von Clausberg braucht, nicht völlig zu bestätigen. Die Krusischen Zahlen treffen in manchen Fällen mit den Eisenschmidtischen besser zusammen. Man sehe Karstens Anfangsgründe. 1. Band. S. 336 — 338.

6. Zusaz.

Vermittelst dieser Tafel findet man das Verhältnis der in den angeführten Orten gewöhnlichen Pfunde gegen einander in Granen des Leipziger Pfundes, oder in Assen holl. Troygewichts. Es verhält sich also in Granen des Leipziger Pfundes z. B. das Pariser Pfund : Londner Pfund (avoir du poids) = 8065 : 7434, und die Produkte der äussern und mittlern Glieder dieser Proportion geben 7434 Pariser Pfund = 8065 Londner Pfund.

Eben so in Assen holl. Troygewichts z. B das Pariser Pfund : Berliner Pfund = 10202 : 9748, folglich machen 9748 Pariser Pfund 10202 Berliner Pfund. Dieser Saz wird der Reduktionssaz, und 1 Pariser Pfund $= \frac{9748}{10202}$ Berl. Pfund, die Reduktionszahl genannt. Will man nun wissen, wieviel 24 Londner Pfund in Pariser Pfund betragen, so schließt man 8065 L. Pf. : 24 L. Pf. = 7434 Par. Pf. : x Par. Pf. Und es ist $x = \frac{24 \cdot 7434}{8065} = 22\frac{986}{8065}$ Par. Pfund.

7. Zusaz.

Bei der Vergleichung der Längenmaasse verschiedener Oerter mit einander, hat man fast eben so viele Vorsicht zu beobachten, als bei der Vergleichung der Gewichte. Folgende Tafel hat J. T. Mayer in seinem gründlichen und ausführlichen Unterrichte zur praktischen Geometrie. Göttingen 1777. I. Theil. p. 52. mitgetheilt, und die fehlenden sind aus dem angeführten Hamb. Contoristen von Kruse, genommen, weil die Verfasser diese Maasse mühsam gesammlet und sorgfältig verglichen, auch ihre Quellen angezeigt haben. Der Herr Lieut. Hahn in seinem angeführten Lehrbuche hat sie ebenfalls gewählt. In Karstens Anfangsgründen 2c. sind nur die Krusischen Zahlen enthalten.

Tafel

Tafel
zur Vergleichung der Fusmaasse.

Namen der Oerter.	Theile, deren 14400 einen Pariser Fus machen.	Namen der Oerter.	Theile, deren 14400 einen Pariser Fus machen.
Der		d. Hallische Werkfus	12795
Amsterdamer Fus	12570	— — Feldfus	19192, 1
Anspacher	13200	Hamburger	12700
Augspurger	13129	Hannöverische	12953
Baseler	13260	Harlemer	12670
Bayersche	12938	Hebraische alte Fus	15900
Berliner	13730	Heidelberger	12275
Berner	13150	Hildesheimer	12445
Bologneser Schritt	84100	Holsteiner	13376
— — Fus	16860	Königsberger	13640
Braunschweigische	12650	Lachter von 8 Spannen, Dänische	89170
Bremer	12820	— zu Eisleben	89150
Breslauer	12600	— zu Freiburg	87920
Brüssler	12900	— im Joachimsthal	86690
Calenberger nach Hogreve	12916	— im Claussthal	85280
Castilische	12530	Leidensche Fus	13900
Cöllnische	12190	Leipziger, nach Tielke	12520
Constantinopolitan.	31400	Lissabonische	13875
Copenhagner	13920	Londner, davon 3 ein Yard machen	13511, 54
Cracauer	15800	— nach Graham	13515, 80
Dänische	14034	nach Celsius	13513
Danziger	12715	Lothringische	12910
Dresdner nach Tielke	12750	Lübeker	12870
Erfurter	12510	Mannheimer	12865
Florentinische Bracci	25845	Mantua Bracci	20620
Frankfurth a. Mayn	12700	Meklenburger	12890
Genfer	21630	Moskauische	14830
Genuaische Palmi	11130	Münchner	12825
Geometrische Schritt	82182	Neapolitan. Palmi	11615
Giessensche Fus	13200	Nürnberger	13467
Griechische nach le Roy	13656	Oldenburger	13130
Haager	14400	Osnabrügger	12375

Namen der Oerter.	Theile, deren 14400 einen Pariser Fus machen.	Namen der Oerter.	Theile, deren 14400 einen Pariser Fus machen.
Der		Der	
Paduaer Fus	18990	Schwedische Fus	
Palermo Palmi	10730	nach Eisenschmidt	13165
Pariser königl. Fus	14400	— nach Danville	13160
Prager	13360	— nach Celsius	13159
Rheinländische		Stettinische	12530
nach Eisenschmidt	13913	Spanische Fus	12530
nach Picard	13920	— — Palmos	9400
nach Lulof	13918, 3	Strasburger	12820, 8
nach Celsius	14146	Stuttgardter	12680
Rigaische	12160	— nach Tob. Mayer	12780
Römische, alt	13090	Turiner	14320
— 625 machen ein		⸗ Piede di Liprando,	
Stadium	13060	nach Beccaria	22770
— neue Palmo	9903	⸗ ⸗ nach Tempelhof	22737
Rostocker	12820	Ulmer	12953
Rotterdammer	13835	Venetianische nach	
Russische	23856	Christiani	15400
Sardinische, Palm.		Wiener, nach Hell	14011, 7
di Sardegna	11130	— nach Lisganig	14012
Savoysche	12000	Zürcher	13300

8. Zusaz.

Bei dieser Vergleichungstafel wird die Länge des Pariser oder königl. französischen Fusmaasses, wie man aus der Ueberschrift in der Tafel sieht, als bekannt zum Grunde gelegt *). Dieser Pariser Fus wird in 12 Zolle, 1 Zoll in 12 Linien, wie der rheinländische Fus, also gewöhnlich in 144 Linien getheilt. Die französische Linie aber nicht wie die rheinl. abermal in 12 Skrupel, sondern in 10 gleiche

*) Ich besize einen Maaßstab von einem Pariser Fusse, dessen Länge ein Reisender von dem, auf dem Pariser Rathhause eingegrabenen Maasse abgenommen hat.

gleiche Theile, welche Punkte (Points) heissen. Daher machen 1440 Punkte die Länge eines Pariser Fusses aus. In der Tafel machen 14400 gleiche Theile die Länge eines französischen Fusses. In solchen Theilen, deren 14400 einen französischen Fus machen, sind die Fusse der in der Tafel angezeigten Oerter ebenfalls ausgedrükt. Wenn also bei dem Rheinl. Fus die Zahl 13913 steht, so heißt das, der Rheinländische Fus ist 13913 Theile des französischen Fusses lang.

9. Zusaz.

Nach dieser Tafel verhält sich der Pariser Fus: Berliner Fus = 14400 : 13730 = 1440 : 1373 oder es sind 1373 Pariser Füsse = 1440 Berliner Füssen, welches wie in Zus. 6. der Reduktionssaz, und 1 Pariser Fus = $\frac{1440}{1373}$ Berliner Füssen die Reduktionszahl ist.

Will man wissen, wieviel 26 Pariser Füsse, Berliner Füsse betragen; so schließt man

1373 Par. F. : 26 Par. F. = 1440 Berl. F. : x Berl. F. und es ist $x = \frac{26 \cdot 1440}{1373} = 27\frac{369}{1373}$ Berl. Füsse.

Wollte man wissen, wieviel 100 Rheinl. Füsse in Par. Füssen machten: so würde man auf folgende Art ansezen: 13913 Par. F. : 100 Par. F. = 14400 Rheinl. F. : x Rheinl. F. und man erhält $x = \frac{100 \cdot 14400}{13913} = 103\frac{6961}{13913}$ Rheinl. Füsse *).

Anmerkung.

Alle kleinern Längenmaasse der Griechen und Römer, eben so wie das Fusmaas sind von den Abmessungen der Glieder des menschlichen Körpers hergenommen. Eine Mannslänge, eine Klafter (orgyra), die Toise der Franzosen, fasset 6 Fus oder 4 Ellenbogen, so wie 1 Ellenbogen $1\frac{1}{2}$ Fus.

*) In des Herrn Vega Vorlesungen über die Mathematik 1. B. sind die Verhältnisse der bei den verschiedenen Artillerie-Corps gebräuchlichen Maasse angegeben, wovon die Pariser und Berliner ausgenommen sind, bei welchen der Artilleriefus von dem gewöhnlichen Fus nicht verschieden ist.

Eine Spanne, oder Handlänge fasset 12 Fingerbreiten, so wie ein Fus 12 Daumenbreiten oder Zolle. Wenn nun 4 Fingerbreiten so viel als 3 Daumenbreiten sind, so fasset 1 Fus 16 Fingerbreiten, oder $1\frac{1}{3}$ Spannen. Ferner eine Handbreite fasset 4 Fingerbreiten, also 1 Fus 4 Handbreiten, und 1 Spanne 3 Handbreiten. Der Grund also, warum die Fusmaasse in verschiedenen Orten und Ländern verschieden sind, mag wohl in der gegebenen natürlichen Eintheilung zunächst liegen.

10. Zusaz.

Das dem Fusse nächst grössere Maas ist die Ruthe, die eben so wie der Fus an verschiedenen Orten von verschiedener Grösse ist. Auch wird sie an einem und eben demselben Orte verschieden eingetheilt. In ganz Deutschland bedient man sich jezt gewöhnlich der Rheinländischen Ruthe, die auf die gemeine und geometrische Art eingetheilt wird. Die gemeine Eintheilung giebt das Duodecimal- und die geometrische Eintheilung das Decimalmaas. Das erstere wird auch häufig das Werkmaas genannt, weil es von den Baumeistern, so wie das Decimalmaas von den Mathematikern und Feldmessern gebraucht wird. Klafter, Faden, Lachter 2c. sind an mehrern Orten Deutschlands und zwar nur bei gewissen Geschäften gewöhnlich. Jedes dieser Maasse besteht aus 6 Füssen, wenn nicht ausdrüklich eine besondere Eintheilung eines Ortes angegeben wird.

In Sachsen, in Halle und im ganzen Herzogthume Magdeburg wird die Bauruthe in 15 Füsse, der Fus in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien, die Feldruthe aber in 10 Füsse 2c. getheilt.

Diese Ruthe ist aber nicht durchgängig im Gebrauch; gewöhnlicher ist die Rheinl. Ruthe, in 12 Füsse 2c. getheilt.

Im Wirtembergischen wird die Ruthe in 16 Werkschue oder Füsse, der Fus in 12 Zoll 2c. eingetheilt.

In

In Frankreich ist die Toise so wie in Deutschland die Ruthe oder Klafter gebräuchlich. Eine Toise enthält 6 Pariser Füsse (pied du Roi). Der Fus wird in 12 Zoll, 1 Zoll aber in 10 Punkte eingetheilt, so daß der Pariser Fus 120 Punkte enthält. Auch pflegt man die Linie aufs neue in 12 gleiche Theile zu theilen nach Bezout und Camus. Nach diesen hat der Pariser Fus 1440 solcher Theile. Verglichen mit Zus. 9.

In England wird der Fus in 12 Zoll, der Zoll in 10 Linien und die Linie in 10 gleiche Theile getheilt, daß also, auf den Fus 1200 solcher gleichen Theile gehen.

11. Zusaz.

Hieraus sieht man ein, wie das Decimalmaas in Duodecimalmaas, und umgekehrt, verwandelt werden kann. Denn nach der Decimaleintheilung ist die Ruthe = 10 Decimalfus = 100 Decimalzoll = 1000 Decimallinien = 10000 Decimalskrupel. Nach der Duodecimaleintheilung aber ist die Ruthe = 12 Duodecimalfus = 144 Duodecimalzoll = 1728 Duodecimallinien = 20736 Duodecimalskrupel. Da nun die der Eintheilung zum Grunde gelegten Ruthen von gleicher Grösse sind: so folgt, das 10 Decimalfüsse = 12 Duodecimalfüssen; 100 Decimalzolle = 144 Duodecimalzollen; 1000 Decimallinien = 1728 Duodecimallinien; 10000 Decimalskrupel = 20736 Duodecimalskrupel &c. sein.

Bei dieser Eintheilung sind also die Duodecimalfüsse kleiner als die Decimalfüsse &c.

Sollte man nun 8 Fus 7 Zoll 5 Linien Decimalmaas, in Duodecimalmaas verwandeln: so würde man schliessen 1000 Decimallinien : 875 Decimallinien = 1728 Duodecimallinien : x Duodecimallinien; und man fände x = 10 Fus, 6 Zoll Duodecimalmaas. Umgekehrt: sollten 10 Fus, 6 Zoll Duodecimalmaas, in Decimalmaas verwandelt werden: so reducirte man Fus und Zoll auf Linien,

 also

also 10 Fus, 6 Zoll Duodec. = 1512 Linien und sezte an 1728 Duodecimallinien : 1512 Duodecimallinien = 1000 Decimallinien : x Decimallinien; wo x = 8 Füsse 7 Zolle und 5 Linien. Eben so leicht ist die Verwandelung der Toisen in das Rheinl. Maas *).

Zur Verkürzung hat man folgende Zeichen bei den Maassen, anstatt der Wörter angenommen. Ruthe bezeichnet man mit °, Fus mit ′, Zoll mit ″, Linie mit ‴ und Skrupel mit ⁗ Strichen, wobei aber bemerkt werden muß, ob es Decimal- oder Duodecimalmaas ist.

1. Anmerkung.

Ausser dieser Eintheilung und Bezeichnung giebt es noch eine andere, wo zum Grundmaasse der Fus anstatt der Ruthe angenommen wird. Mayer in seiner praktischen Geometrie ꝛc. und einige andere ziehen diese der im vorhergehenden angeführten Eintheilung noch vor. Auch ist die Bezeichnung sehr einfach und deutlich. Mehreres davon wird in der Geometrie selbst vorkommen.

2. Anmerkung.

Statt der in den Tafeln angegebenen Zahlen kann man sich der Logarithmen dieser Zahlen bedienen, vermittelst welcher die Rechnungen sehr abgekürzt werden. Kürze halber sind die

*) Bei der Verwandelung der Toisen in das rheinl. Maas muß man sich nur hüten, auf die Toise nicht 6 rheinl. Füsse zu rechnen, denn sie hält 6 Pariser Füsse. In diesen Fehler ist Sturm gefallen im Veritable Vauban. p. 101. Sturm berechnete seine Festungen, so wie izt noch die meisten deutschen Ingenieurs, nach rheinl. Maasse, rechnete aber auf die von Vauban angegebene Toise 6 rheinl. Füsse, da sie doch 6 Pariser enthält; daher wurde die äussere Polygon seiner Festung 90 rheinl. Ruthen, die Vauban zu 180 Toisen bestimmte. Will man wissen, um wie viel kleiner die äussere Polygon würde, als sie Vauban haben wollte; so schliesse man auf folgende Art: 13913 Par. F. : 1080 Par. F. (1080′ = 180 T.) = 14400 rheinl. F. : x rheinl. F., und man erhält $x = 93^\circ\ 1\frac{11179}{13913}'$, also beinahe 93° 2′ rheinl. Sturm hatte also die äussere Polygon 3 Ruthen 2 Fus kleiner angenommen, als sie nach Vaubans Maxime sein sollte.

die Logarithmen den Zahlen in den Tafeln nicht beigefügt worden, weil sie ein ieder, vermöge der vorhin gegebenen Anweisung in den, der Arithmetik beigefügten Tafeln aufsuchen, und durch Rechnung bestimmen kann.

12. Zusaz.

Der Infanterieofficier kommt, besonders im Kriege, selten in den Fall, Fusmaasse zu brauchen. Ihm sind die Schritte bequemer als iene Maasse, daher ist es nöthig, des Schrittmaasses noch zu erwähnen. Die Schritte werden in gemeine und geometrische Schritte eingetheilt. Der gemeine Schritt beträgt 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fus rheinl., bald mehr oder weniger, ie nachdem ein Mensch weiter als der andere schreitet. Dieser Schritt wird auch der einfache Schritt (pes) genannt. Zwei einfache Schritte, also 4 bis 5 Fus rheinl. mehr oder weniger, machen einen doppelten oder geometrischen Schritt (passus) *).

1. Anmerkung.

Für das Militär wird es nicht ohne Nuzen sein, die kaufmännischen Längenmaasse verschiedener Oerter in einer Tabelle **) zu finden, die durch Ellen in Pariser Linien angegeben werden. Die Berliner Elle liegt ebenfalls als Einheit der Vergleichung zum Grunde. 6 Berliner Ellen sind = 7 hallischen, und 1 hall. ist = 2 Fus hall. Werkmaas.

Tafel

*) Bei der Preussischen Infanterie wird der gemeine Schritt beinah durchgängig 2 Fus und 4 Zoll rheinl. Duodecimalmaas lang angenommen. Während einer Minute werden 14 Ruthen 9 Fus 4 Zoll zurükgelegt: so daß also auf eine Minute 76 Schritte gehen. Die Reduktion der Schritte auf Ruthen ist mit den vorigen Reduktionen gleich, nur daß man hier eine andere Reduktionszahl, mithin auch einen andern Reduktionssaz bekommt.

**) Diese Tafel ist aus Bötticher's statistischen Uebersichtstabellen ꝛc. genommen. Der Officier bekommt eher die Länge einer Elle an einem Orte, als die Länge eines Fusses zu sehen, und daher muß es auch leichte werden, eine im Ellenmaasse ausgedrükte Grösse in Ruthen, Füsse oder Schritte zu verwandeln.

Tafel
einiger Ellenmaaße
in französischen Linien,
verglichen mit der Berliner Elle = 1.

Namen der Oerter.	Pariser Linien.	Einer Berliner Elle sind gleich
Achen 1 Elle - - - - - -	296	0,999
Altona 1 Elle - - - - - -	254	1,163
Amsterdam 1 Elle - - - - -	304,6	0,970
Archangel 1 Arschine - - - -	315,3	0,937
Arragonien 1 Vara - - - -	349,4	0,846
Aurich 1 Elle - - - - - -	298,3	0,990
Berlin, Halle, Königsberg, Stettin 1 Elle	295,6	1.
Bern 1 Elle - - - - - -	240	1 231
Brabant 1 Elle - - - - - -	306,5	0,964
Braunschweig 1 Elle - - - - -	253	1 168
Breslau 1 Elle - - - - - -	243,8	1,212
Brüssel 1 gr. Elle - - - - -	307,8	0,960
- - 1 kl. Elle - - - - -	303,4	0,974
Cassel 1 Elle - - - - - -	248,8	1,188
Cölln 1 gr. Elle - - - - - -	308	0,959
- - 1 kl. Elle - - - - - -	255	1,159
Constantinopel 1 gr. Piek - - -	296,3	0,997
- - - - 1 kl. Piek - - -	286,9	1,030
Coppenhagen 1 Elle - - - - -	278,1	1,062
Cracau 1 Elle - - - - - -	273,2	1,082
Danzig 1 Elle - - - - - -	254 2	1,162
Dresden 1 Elle - - - - - -	250,9	1,176
Edimburg 1 Elle - - - - -	421,2	0,701
Elbingen 1 Elle - - - - - -	250,2	1,181
Emden 1 Elle - - - - - -	297,2	0,994
Erfurt 1 gr. Elle - - - - -	243,7	1,212
- - 1 kl. Elle - - - - - -	179	1,651
Frankfurt am Main - - - - -	239,2	1,235
Frankfurt an der Oder, alte Elle - -	294,1	1,005
Genf 1 Aune - - - - - -	506,3	0 583
Genua 1 Bracce - - - - -	259,6	1,138
Göttingen 1 Elle - - - - -	258	1,145
Gotha 1 Elle - - - - - -	250,6	1 179
Gothenburg 1 Elle - - - - -	262,9	1,124

Namen der Oerter.	Pariser Linien.	Einer Berliner Elle sind gleich
Hamburg 1 Elle - - - - - -	254	1, 163
Hannover 1 Elle - - - - -	258	1, 145
Königsberg 1 kl. Berl. Elle - - -	253, 2	1, 167
Leipzig 1 Elle - - - - - -	250, 6	1, 179
Lissabon 1 Vara - - - - - -	485, 2	0, 609
Livorno 1 Bracce in Wollenzeug - -	261, 5	1, 130
London 1 Elle Leinwand - - -	506, 9	0, 583
- - 1 Yard - - - - - -	405, 5	0, 728
- - 1 Gode Frieß - - - - -	311	0, 980
Lucca 1 Bracce in Wolle - - -	268, 1	1, 108
Madrid 1 Vara - - - - - -	376, 7	0, 768
Magdeburg 1 alte Elle - - - -	258, 6	1, 143
Malta 1 Canne - - - - - -	993, 2	0, 297
Memel 1 Elle - - - - - -	254, 2	1, 162
Mailand 1 Br. in Wolle - - - -	299, 6	0, 986
Neapolis 1 Canne - - - - -	935, 6	0, 315
Norwegen 1 Elle - - - - - -	278, 1	1, 062
Nürnberg 1 Elle - - - - - -	292, 4	1, 010
Ostende 1 Elle - - - - - -	309, 9	0, 954
Padua 1 Bracce - - - - -	297	0, 995
Paris 1 Aune in Leinwand - - -	255, 3	1, 157
Parma 1 Bracce - - - - -	242, 1	1, 220
Pisa 1 Palme - - - - - -	132, 3	2, 236
Prag 1 Elle - - - - - -	262, 6	1, 125
Presburg 1 Elle - - - - - -	247, 3	1, 195
Regensburg 1 Elle - - - - -	395, 5	0, 822
Riga 1 Elle - - - - - -	242, 9	1, 217
Rom 1 Bracce in Leinwand - -	281, 3	1, 050
Salzburg 1 Elle in Leinwand - -	445, 8	0, 663
Sardinien und Savoyen 1 Rase - -	263, 1	1, 123
Schlesien 1 Elle - - - - - -	255, 3	1, 157
Stettin 1 alte Elle - - - - -	288, 5	1, 024
Stokholm 1 Elle - - - - - -	262, 9	1, 124
Stralsund 1 Elle - - - - -	258	1, 145
Thorn 1 Elle - - - - - -	252, 4	1, 171
Trident 1 Elle in Wolle - - -	300	0, 985
Triest 1 Elle in Wolle - - - -	299, 6	0, 986
Venedig 1 Bracce in Wolle - - -	295, 2	1, 001
Warschau 1 Elle - - - - - -	273	1, 082
Wien 1 Elle - - - - - -	344, 5	0, 858

Durch Hülfe dieser Tafel kann man ebenfalls die, in den angeführten Oertern gebräuchlichen Längenmaasse auf Fus und Ruthen Rheinl. reduciren. Die vorhin angeführten Regeln geben davon vollständigen Unterricht.

2. Anmerkung.

Noch einige Beispiele zu der geraden und umgekehrten einfachen Regel Detri.

1. Wenn von einem Pfunde Pulver 20 Flintenpatronen gemacht werden können, wie viel Pulver wird man zu 50000 Patronen nöthig haben? 22 Centner 80 Pfund.
2. Ein Centner Schießpulver kostet 27 Rthlr. 12 Gr. wie hoch kommt ein Pfund? 6 Gr.
3. Wenn 4 Mann in einem Tage 64 Faschinen verfertigen können; wie viel Mann hat man nöthig, wenn man in eben der Zeit 6000 verfertiget haben will? 375 Mann.
4. Wenn 100 Rthlr. in einem Jahre mit 5 Rthlr. verzinset werden; wie viel beträgt von 250 Rthlr. jährlich die Zinse? 12 Rthlr. 12 Gr.
5. Wie viel tragen unter der vorigen Bedingung diese 250 Rthlr. Kapital in 4 Jahren und 6 Monaten Zinse? 56 Rthlr. 6 Gr. *)
6. Zu Montirung einer Kompagnie werden 720 Ellen Tuch à $\frac{5}{4}$ breit erfordert: wenn nun dazu Unterfutter à $\frac{3}{4}$ breit genommen wird, wie viel Ellen hat man dazu nöthig? 1200 Ellen.

Daß bei den meisten Aufgaben dieser Art auf Umstände Rüksicht genommen werden muß, die nicht in den Ansaz gebracht werden können, versteht sich von selbst.

So kann man in N. 3. nicht annehmen, ein Arbeiter kann eben so viel als der andere arbeiten, aber einer kann dem andern durchhelfen, d. i. man rechnet nach einem **Mittel**, also wird nicht die größte, aber auch nicht die kleinste Anzahl der Faschinen 2c. in Rechnung gebracht. Eben so finden bei Rechnungen wie in N. 6. die Proportionen nach der größten Schärfe, nicht immer ihre Anwendungen. Die Form der Zeuge, das

*) N. 4. und 5. enthalten den Grund der ganzen Zinsrechnung, die aber durch Hülfe der zusammengesezten Regel Detri mehr abgekürzt werden kann.

das Unterlegen des Unterfutters, wenn es verarbeitet wird und noch mehreres kommt ebenfalls in Betrachtung *).

B.

Die zusammengesezte gerade und umgekehrte Regel Detri.

§. 186. Besteht eine Rechnungsaufgabe aus einer, oder aus mehrern einzelnen zusammengesezten Proportionen, so gehört sie zu der zusammengesezten Regel Detri. Ist die Proportion aus zwei einzelnen Proportionen zusammengesezt: so wird die Rechnungsregel Regula quinque (weil man zu 5 gegebenen Stüken das 6ste suchen soll) genannt. Besteht sie aber aus 3 einzelnen Proportionen, die Regula septem (weil man zu 7 gegebenen Stüken das 8te suchen soll). Der Grund dieser beiden Rechnungsregeln ist folgender:

Ist nämlich $a : b = c : w$
$d : e = w : y$
$f : g = y : x$,
so ist $ad : be = c : y$, regula quinque,
und $adf : beg = c : x$, regula septem.

Beispiele.

100 Thlr. tragen in einem Jahre 5 Thlr. Zinse, wieviel tragen 250 Thlr. in 4 Jahren und 6 Monaten Zinse?

100 Thlr.

*) Officier müssen sich besonders gewöhnen, die Theorien vorgelegter Aufgaben gehörig zu untersuchen, und mit der Natur der Rechnungsfragen zu vergleichen, weil sie sonst vieles finden werden, was an und für sich richtig, aber in der Ausübung nicht taugbar ist. In solchen Fällen, wenn man unrichtige Resultate erhält, ist nicht die Theorie schuld, sondern die Anwendung derselben, ohne Prüfung der Umstände.

100 Thlr. in 12 Mon.	geben 5 Thlr. Zinse	wieviel 250 Thlr.? in 4 Jahr. u. 6 Mon.?
1200 :	5 =	13500
		5
		67500

12) 67500 | 56 Thlr.
60 00
75
72
300
1200 | $\frac{1}{4}$ Thlr. $= \frac{1}{4} \cdot 24 = \frac{24}{4} = 6$ Gr.

Also ist die ganze Interesse 56 Thlr. 6 Gr., verglichen mit §. 185. Zus. 12. Anmerk. 2.

Anstatt der Regel Quinque könnte man sich der einfachen Regel Detri bedienen, die man aber so vielmal ansezen müßte, als Fragzahlen in der Aufgabe vorhanden wären.

In wie viel Wochen werden 16 Arbeiter einen Damm von 300 Fus vollenden, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; da 20 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, einen Damm von 400 Fus in 4 Wochen vollendet haben? Der Ansaz ist folgender:

16 Arb. : 20 Arb. = 4 Woch. : w Wochen.
300 Fus : 400 Fus = w — : y —
12 St. : 8 St. = y — : x —

folglich $(16 \cdot 300 \cdot 12) : (20 \cdot 400 \cdot 8) = 4 : x$,

also $x = \frac{20 \cdot 400 \cdot 8 \cdot 4}{16 \cdot 300 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{40}{9}$
$= 4\frac{4}{9}$ Wochen.

Anmerkung.

Nach eben diesen Regeln kann man auch die Verhältnisse zwischen den Längenmaassen und Gewichten eines Ortes finden, welcher in den Tafeln nicht enthalten ist, gegen einen andern, so darin angetroffen wird. Die Verhältnisse können durch zwei, drei und mehrere andere angegeben werden.

§. 187.

§. 187. Die Regula multiplex oder die Kettenregel lehrt hieher gehörige Rechnungsaufgaben kurz zu behandeln. Die Kettenregel enthält zwar nur eine Fragzahl, aber mehrere Verhältnisse, die gleichsam kettenweise mit einander verbunden sind. Es liegen mehrere Proportionen zum Grunde, welche sich aber vortheilhaft in einen einzigen Ansaz zusammenziehen lassen. Folgende Beispiele werden statt der Regeln dienen.

Soll z. B. das Verhältnis eines Dukaten zu einem Groschen angegeben werden, so kann dies entweder durch ein einziges Verhältnis 66 : 1, oder durch die Zwischenverhältnisse, als des Dukaten zum Thaler, des Thalers zur Mark, der Mark zum Groschen geschehen. So wäre

Duk. : Thaler = 11 : 4
Thaler : Mark = 3 : 1
Mark : Grosch. = 8 : 1

$(11 . 3 . 8) : (4 . 1 . 1) = 66 : 1$

Folglich Duk. : Groschen = 66 : 1

Oder: 4 Duk. = 11 Thaler
1 Thaler = 3 Mark
1 Mark = 8 Groschen,

folglich 4 Duk. = 264 Gr., oder 1 Duk. = 66 Gr.

Wollte man wissen, wieviel 1000 Thlr. Preussisch Geld in holl. Dukaten betragen, und man wüßte, daß der Kours gegen Gold 135 Procent wäre, d. i., daß 135 Thlr. Preuß. Geld 100 Thlr. holl. Kourant machten; daß ferner 1 Thlr. holl. Kourant $2\frac{1}{2}$ Fl. holl. Kourant, oder 2 Thlr. holl. Kourant 5 Fl. holl. Kourant

machten; daß endlich 1 Fl. = 20 Stüver, und 1 Duk. = 5 Fl. 4 Stüver = 104 Stüver wären: so würde man sezen:

x Duk.	=	1000 Thlr. Pr. Geld
27.135 Thlr. Pr. G.	=	100 Thlr. holl. Kour. 50.25
2 Thlr. holl.	=	5 Fl. holl.
1 Fl. holl.	=	20 Stüver 5.
13 . 26 . 104 Stüver	=	1 Dukaten

Hebt man auf beiden Seiten durch gleiche Divisionen auf: so erhält man durch gehörige Multiplikation $351 \cdot x = 125000$, folglich $x = \frac{125000}{351} = 356\frac{44}{351}$ Dukaten.

§. 188. Die Reesische *) Regel ist eine besondere Methode, die Regel Detri, vorzüglich die zusammengesezte, so anzusezen, daß alle Faktoren des Divisors mit der unbekannten Grösse auf die eine Seite, und die Faktoren des Dividendums auf die andere Seite kommen.

Der Grund des Ansazes ist dieser. Jedes Proportionsbeispiel bestehet aus der Angabe und der Frage, und beide bestehen aus Verhältnissen, deren Glieder als Ursach und Wirkung **) betrachtet werden können. Sezt

*) Van Rees trug diese Regel vor in der Schrift: Allgemeine Regel der Rechenkunst. Aus dem Holl. Bremen 1739. Damit kann verglichen werden: Willichs gründliche Vorstellung der Reesischen allgemeinen Regel der Rechenkunst. Bremen 1759. ꝛc. Ferner: Schmids Rechenkunst. Leipzig 1774. Schmid unterscheidet die Reesische Regel nicht von der Kettenregel.

**) Auch bei andern ähnlichen Aufgaben, wo nicht eben wirkende Ursachen und Wirkungen vorhanden sind, aber doch Dinge, die sich nach den angenommenen Grundsäzen verhalten, kann diese Rechnungsregel angewendet werden, wie z. B. bei Geschwindigkeiten, Zeiten, Räumen ꝛc.

Sezt man nun von der Frage die Ursach zur linken und die Wirkung zur Rechten: so kommt bei der Angabe die Wirkung zur linken und die Ursach zur Rechten. Und umgekehrt.

In dem Beispiele §. 186. ist die Angabe, daß 20 Arbeiter, wenn sie 4 Wochen lang täglich 8 Stunden arbeiten, die Wirkung hervorbringen, daß sie einen Damm von 400 Fus vollenden, und der Ansaz ist folgender:

x Wochen	
16 Arbeiter	400 Fus
12 Stunden	
	20 Arbeiter
300 Fus	4 Wochen
	8 Stunden
4	2
6	
3	10
9	40 also $\frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ Wochen = x.

Die übrige Behandlung, wodurch man die Aufgabe auflöset, ist wie im vorhergehenden Beispiele §. 187.

Kommen Brüche unter den Zahlen vor, so werden sie weggeschaft, wenn man den Zähler an seiner Stelle stehen läßt, den Nenner aber auf die entgegengesezte Seite schreibt. Z. B. wieviel Gr. sind $\frac{2}{3}$ Thlr.?

x Gr.	$\frac{2}{3}$ Thlr.
1 Thlr.	24 Gr.
3	8

also ist $x = \frac{2 \cdot 8}{1} = 16$ Gr.

§. 189. Es giebt auch Fälle, wo beide, die Kettenregel und die Reesische, ihre Anwendung finden. Z. B. man kann ein Hauswesen von 10 Personen mit 50 Thlr. Pr. Kourant für Brodt, das Jahr hindurch erhalten, wenn der Berl. Scheffel 1 Thlr. kostet: wieviel Kassengeld hat man für 8 Personen nöthig, wenn der Himten 18 Gr. kostet? Unter der Voraussezung, 3 Scheffel = 5 Himten; 14 Thlr. Kassengeld = 15 Thlr. Gold, und Kourant ist 5 pro Cent schlechter als Gold, ist der Ansaz folgender:

x Thlr. Kassengeld	8 Personen
10 Personen	18 Gr. Kassengeld der Himten
24 Gr. Kourant	50 Thlr. Pr. Kourant
105 Thlr. K.	100 Thlr. Gold
15 Thlr. Gold	14 Thlr. Kassengeld
3 Scheffel	5 Himten

Das Facit ist 44 Thlr. 10 Gr. 7 Pf. Kassengeld.

Der erste Theil des Beispiels ist nach der Reesischen Regel geordnet; dann ist das Pr. Kourant durch die Kettenregel auf Kassengeld gebracht. Auch kommt Scheffelpreis und Himtenpreis vor. Dadurch mußte die Ausgabe nothwendig grösser werden in dem Verhältnisse 5 : 3, daher ist 5 in die Kolumne des Dividendums, und 3 in die des Divisors gesezt worden.

Dies giebt zugleich eine Hülfsregel, die man in ähnlichen Fällen vortheilhaft benuzen kann.

Anmerkung.

Die Kettenregel, so wie die Reesische Rechnungsregel, haben ihren grossen Nuzen, wenn die Aufgaben von der Art sind, daß man diese Regeln anwenden kann. Inzwischen ist nicht zu leugnen, daß in praktischen Rechenbüchern der Gebrauch der erstern, nämlich der Kettenregel bis zur Pedanterie übertrieben

den wird. Alle Rechnungsfragen, die sich kurz und leicht vermittelst der einfachen Regel Detri beantworten lassen, beantworte man durch Hülfe derselben, und in zusammengesezten Fällen bediene man sich, wenn es mit Vortheil angeht, der Kettenregel. In den Fällen kann man keinen Gebrauch von der Kettenregel machen, wenn ausser geometrischen Verhältnissen noch Summen und Differenzen vorkommen, die ebenfalls in Anschlag kommen müssen, wie z. B. bei einem Handel die gemachten Unkosten, welche nicht nach dem Verhältnis der Waaren berechnet werden können. Eben so wenig können Beispiele unter einen und denselben Ansaz gebracht werden, bei welchen zwei ungleichartige Proportionen vorkommen z. B. von Gewichten und Geldsorten ꝛc. Das Uebrige muß man aus praktischen Schriftstellern lernen, in welchen man auch mehrere hierher gehörige Aufgaben findet.

§. 190. Die Gesellschafts- und Vermischungsrechnung sind nur dem Obiekte nach verschieden, und gründen sich auf die allgemeine Aufgabe: ein Ganzes in eine gegebene Anzahl Theile, nach einem gegebenen Verhältnis einzutheilen. Sezt man das Ganze S, die gesuchten Theile x, y, z, das Verhältnis a : b : c, so ist $a + b + c = S = a : x; = b : y; c : z$ ꝛc.

Durch Hülfe der Gesellschaftsrechnung kann man Gewinnst und Verlust unter mehrern Personen, wie z. B. bei Kompagniehandlungen, Koncoursen, Erbtheilungen, Havereien, Abziehung der Quartä Falcidiä, wobei, wenn das Vermögen nicht hinreicht, die legitarii verhältnismässig verlieren. Ferner bei Repartitionen, wobei die Zahl, welche angiebt, in welchem Verhältnisse ieder Theilnehmende in Anschlag gebracht werden muß, der Fus genannt wird. Auch die Berechnung der Brandkollekten ꝛc. gehört hieher, wobei oft der mittlere Repartitionsfus, welcher mit dem Mittel (Durchschnitte) §. 183. einerlei ist, gesucht werden muß.

Die Vermischungsrechnung wird dann gebraucht, wenn von einer Sache, die aus verschiedenen Ingredienzien besteht, als Schiespulver, Kanonen, Metall, Arzeneien rc. eine gewisse Quantität verfertiget werden soll, und gefragt wird, wieviel von jeder Art der Bestandtheile in die Vermischung gebracht werden muß.

Beispiele zu der Gesellschaftsrechnung.

1. Vier Personen a, b, c und d legen zu einer Handlung eine Summe von 24000 Rthlr. an, und zwar giebt a 9600 Rthlr., b 6000 Rthlr., c 4800 Rthlr. und d 3600 Rthlr. Wenn nun mit dieser Summe = S 5000 Rthlr. gewonnen werden, wieviel muß ein jeder nach Verhältnis seiner Einlage erhalten?

Der Gewinn 5000 Rthlr. muß hier in 4 Theile getheilt werden, die sich wie 9600 : 6000 : 4800 : 3600, oder wie 96 : 60 : 48 : 36, oder auch wie 8 : 5 : 4 : 3 verhalten sollen (§. 141.), so daß $a = 8$, $b = 5$, $c = 4$ und $d = 3$, also $a + b + c + d = 20$, aber $S = 5000$ ist. Demnach hat man

1) $20 : 8 = 5000 : v$

oder $1 : 8 = 250 : v$,

also $v = \frac{250 \cdot 8}{1} = 2000$ Rthlr.

2) $20 : 5 = 5000 : x$

oder $1 : 5 = 250 : x$,

also $x = \frac{250 \cdot 5}{1} = 1250$ Rthlr.

3) $20 : 4 = 5000 : y$

oder $1 : 4 = 250 : y$,

also $y = \frac{250 \cdot 4}{1} = 1000$ Rthlr.

4)

4) $20 : 3 = 5000 : z$,
oder $1 : 3 = 250 : z$

also $z = \frac{250 \cdot 3}{1} = 750$ Rthlr.

Folglich $v + x + y + z = 2000 + 1250 + 1000 + 750 = 5000$ Rthlr.

2. Drei Kompagnien Soldaten werden, unter den Befehlen eines Staabsofficiers, zur Bestürmung eines Ortes abgeschikt. Dieser Staabsofficier verspricht der Mannschaft nach vollzogener Einnahme, die gemachte Beute, die sie auf folgende Art unter sich theilen sollen. Diejenige Kompagnie, die sich am meisten hervorthun würde $\frac{1}{2}$, die nach ihr $\frac{1}{3}$, und die am wenigsten Muth beweisen würde $\frac{1}{4}$ von der Beute. Nun soll die Beute 9600 Rthlr. betragen: die Frage ist, wie groß ist der Antheil einer ieden Kompagnie? $S = 9600$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{4}$, also $a + b + c = \frac{13}{12}$ *).

Beispiele zu der Vermischungsrechnung.

1. Um gutes Schiespulver zu verfertigen, nimmt man zu einem Pfunde Salpeter 4 Loth Schwefel und 6 Loth Kohlen. Wenn man nun 100 Pfund Schiespulver verfertigen wollte, wie viel Salpeter, Schwefel und Kohlen wird dazu nöthig sein? Man seze $a : b : c = 32 : 4 : 6 = 16 : 2 : 3$; folglich $a + b + c = 21$ und $S = 100$. Also

1)

*) Die Auflösung der Aufgabe ist wie im vorigen, nur mit dem Unterschiede, daß man die Zahl 9600 in diesem Falle nicht mit 2, 3, 4 rc. dividiren kann, um kürzere Zahlen zu erhalten, weil die Summe der Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ nicht genau 1 beträgt. Die Brüche haben hier nicht die Bedeutung, daß ieder gesuchte Theil gerade soviel vom Ganzen beträgt, als ieder von den Brüchen anzeigt; sondern sie zeigen nur das Verhältnis an, welches die Theile unter einander haben sollen.

Bei den Römern war die Theilung des Ganzen in 12 gleiche Theile sehr gewöhnlich.

1) $21 : 16 = 100 : x$

also $x = \frac{100 \cdot 16}{21} = 76\frac{4}{21}$ Pfund

2) $21 : 2 = 100 : y$,

also $y = \frac{100 \cdot 2}{21} = 9\frac{11}{21}$ Pfund

3) $21 : 3 = 100 : z$,

also $z = \frac{100 \cdot 3}{21} = 14\frac{6}{21}$ Pfund.

folglich $x + y + z = 76\frac{4}{21} + 9\frac{11}{21} + 14\frac{6}{21}$ Pf. = 100 Pf.

2. Zu Kanonen-Metall rechnet man auf 100 Pfund Kupfer, 9 Pfund Zinn, und 6 Pfund Messing. Wenn nun zu dem Guß einer halben Karthaune 4800 Pfund erfordert werden, wieviel muß von ieder der erwähnten Materien genommen werden?

Anmerkung.

Auch bei der Gesellschafts- und Vermischungsrechnung können zusammengesezte Aufgaben vorkommen, die aber vermittelst der zusammengesezten Proportionen auf eine sehr leichte Art aufgelößt werden können.

Ueberhaupt, wer die Lehre von den Proportionen völlig in seiner Gewalt hat, wird ohne gehäufte Beispiele Rechnungsfragen von mancherlei Art zu beantworten im Stande sein, und wem iene Lehren fehlen, wird durch Beispiele nur mechanisch gebildet.

In praktischen Rechenbüchern werden noch eine Menge andere Rechnungsregeln vorgetragen, die aber von den bisher abgehandelten nur sehr wenig abweichen. Dahin gehören Tausch-, Kassir-, Faktorei-, Abzugs-, Zeit- und Steuerrechnung. Ferner die Tara-, Fusti-, und Wechselrechnung, die aber den Kaufmann mehr, als iemanden andern interessiren. Die Alligationsrechnung, welches eine besondere Art der Vermischungsrechnung ist, und die regula coeci etc. gehören in die Algebra. In dieser Wissenschaft werden auch unter andern mehrere Anwendungen der Progressionen vorkommen.

Tafel

der

Quadrat- und Kubikzahlen

von 1 bis 1000.

N.²	0²	100²	200²	300²	400²
0	0	10000	40000	90000	160000
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601

$N.^2$	0^2	100^2	200^2	300^2	400^2
0	0	10000	40000	90000	160000
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601

N.²	0²	100²	200²	300²	400²
50	2500	22500	62500	122500	202500
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23409	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	68121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	83521	151321	239121
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001

N.²	500²	600²	700²	800²	900²
0	250000	360000	490000	640000	810000
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	720801	900601

N.²	500²	600²	700²	800²	900²
50	302500	422500	562500	722500	902500
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434281	576081	737881	919681
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	321489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327184	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	990025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001

N.^{3}	0^3	100^3	200^3	300^3	400^3
0	0	1000000	8000000	27000000	64000000
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30959144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849

N.³	0³	100³	200³	300³	400³
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499

N.³	500³	600³	700³	800³	900³
0	125000000	216000000	343000000	512000000	729000000
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349

N.³	500³	600³	700³	800³	900³
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999

Tafel

der

gemeinen Logarithmen

von 1 bis 1000.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
0	inf. neg.	50	1,6989700	100	2,0000000	150	2,1760913
1	0,0000000	51	1,7075702	101	43214	151	89769
2	0,3010300	52	1,7160033	102	86002	152	2,1818436
3	0,4771213	53	1,7242759	103	2,0128372	153	46914
4	0,6020600	54	1,7323938	104	70333	154	75207
5	0,6989700	55	1,7403627	105	2,0211893	155	2,1903317
6	0,7781513	56	1,7481880	106	53059	156	31246
7	0,8450980	57	1,7558749	107	93838	157	58997
8	0,9030900	58	1,7634280	108	2,0334238	158	86571
9	0,9542425	59	1,7708520	109	74265	159	2,2013971
10	1,0000000	60	1,7781513	110	2,0413927	160	41200
11	1,0413927	61	1,7853298	111	53230	161	68259
12	1,0791812	62	1,7923917	112	92180	162	95150
13	1,1139434	63	1,7993405	113	2,0530784	163	2,2121876
14	1,1461280	64	1,8061800	114	69049	164	48438
15	1,1760913	65	1,8129134	115	2,0606978	165	74839
16	1,2041200	66	1,8195439	116	44580	166	2,2201081
17	1,2304489	67	1,8260748	117	81859	167	27165
18	1,2552725	68	1,8325089	118	2,0718820	168	53093
19	1,2787536	69	1,8388491	119	55470	169	78867
20	1,3010300	70	1,8450980	120	91812	170	2,2304489
21	1,3222193	71	1,8512583	121	2,0827854	171	29961
22	1,3424227	72	1,8573325	122	63598	172	55284
23	1,3617278	73	1 8633229	123	99051	173	80461
24	1,3802112	74	1,8692317	124	2,0934217	174	2,2405492
25	1,3979400	75	1,8750613	125	69100	175	30380
26	1,4149733	76	1,8808136	126	2,1003705	176	55127
27	1,4313638	77	1,8864907	127	38037	177	79733
28	1,4471580	78	1,8920946	128	72100	178	2,2504200
29	1,4623980	79	1,8976271	129	2,1105897	179	28530
30	1,4771213	80	1,9030900	130	39434	180	52725
31	1,4913617	81	1,9084850	131	72713	181	76786
32	1,5051500	82	1,9138139	132	2,1205739	182	2,2600714
33	1,5185139	83	1,9190781	133	38516	183	24511
34	1,5314789	84	1,9242793	134	71048	184	48178
35	1,5440680	85	1,9294189	135	2,1303338	185	71717
36	1,5563025	86	1,9344985	136	35389	186	95129
37	1,5682017	87	1,9395193	137	67206	187	2,2718416
38	1,5797836	88	1,9444827	138	98791	188	41578
39	1,5910646	89	1,9493900	139	2,1430148	189	64618
40	1,6020600	90	1,9542425	140	61280	190	87536
41	1,6127839	91	1,9590414	141	92191	191	2,2810334
42	1,6232493	92	1,9637878	142	2,1522883	192	33012
43	1,6334685	93	1,9684829	143	53360	193	55573
44	1,6434527	94	1,9731279	144	83625	194	78017
45	1,6532125	95	1,9777236	145	2,1613680	195	2,2900346
46	1,6627578	96	1,9822712	146	43529	196	22561
47	1,6720979	97	1,9867717	147	73173	197	44662
48	1,6812412	98	1,9912261	148	2,1702617	198	66652
49	1,6901961	99	1,9956352	149	31863	199	88531

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
200	2,3010300	250	2,3979400	300	2,4771213	350	2,5440680
201	31961	251	96737	301	85665	351	53071
202	53514	252	2,4014005	302	2,4800069	352	65427
203	74960	253	31205	303	14426	353	77747
204	96302	254	48337	304	28736	354	90033
205	2,3117539	255	65402	305	42998	355	2,5502284
206	38672	256	82400	306	57214	356	14500
207	59703	257	99331	307	71384	357	26682
208	80633	258	2,4116197	308	85507	358	38830
209	2,3201463	259	32998	309	99585	359	50944
210	22193	260	49733	310	2,4913617	360	63025
211	42825	261	66405	311	27604	361	75072
212	63359	262	83013	312	41546	362	87086
213	83796	263	99557	313	55443	363	99066
214	2,3304138	264	2,4216039	314	69296	364	2,5611014
215	24385	265	32459	315	83106	365	22929
216	44538	266	48816	316	96871	366	34811
217	64597	267	65113	317	2,5010593	367	46661
218	84565	268	81348	318	24271	368	58478
219	2,3404441	269	97523	319	37907	369	70264
220	24227	270	2,4313638	320	51500	370	82017
221	43923	271	29693	321	65050	371	93739
222	63530	272	45689	322	78559	372	2,5705429
223	83049	273	61626	323	92025	373	17088
224	2,3502480	274	77506	324	2,5105450	374	28716
225	21825	275	93327	325	18834	375	40313
226	41084	276	2,4409091	326	32176	376	51878
227	60259	277	24798	327	45478	377	63414
228	79348	278	40448	328	58738	378	74918
229	98355	279	56042	329	71959	379	86392
230	2,3617278	280	71580	330	85139	380	97836
231	36120	281	87063	331	98280	381	2,5809250
232	54880	282	2,4502491	332	2,5211381	382	20634
233	73559	283	17864	333	24442	383	31988
234	92159	284	33183	334	37465	384	43312
235	2,3710679	285	48449	335	50448	385	54607
236	29120	286	63660	336	63393	386	65873
237	47483	287	78819	337	76299	387	77110
238	65770	288	93925	338	89167	388	88317
239	83979	289	2,4608978	339	2,5301997	389	99496
240	2,3802112	290	23980	340	14789	390	2,5910646
241	20170	291	38930	341	27544	391	21768
242	38154	292	53829	342	40261	392	32861
243	56063	293	68676	343	52941	393	43926
244	73898	294	83473	344	65584	394	54962
245	91661	295	98220	345	78191	395	65971
246	2,3909351	296	2,4712917	346	90761	396	76952
247	26970	297	27564	347	2,5403295	397	87905
248	44517	298	42163	348	15792	398	98831
249	61993	299	56712	349	28254	399	2,6000729

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
400	2,6020600	450	2,6532125	500	2,6989700	550	2,7403627
401	31444	451	41765	501	98377	551	11516
402	42261	452	51384	502	2,7007037	552	19391
403	53050	453	60982	503	15680	553	27251
404	63814	454	70559	504	24305	554	35098
405	74550	455	80114	505	32914	555	42930
406	85260	456	89648	506	41505	556	50748
407	95944	457	99162	507	50080	557	58552
408	2,6106602	458	2,6608655	508	58637	558	66342
409	17233	459	18127	509	67178	559	74118
410	27839	460	27578	510	75702	560	81880
411	38418	461	37009	511	84209	561	89629
412	48972	462	46420	512	92700	562	97363
413	59501	463	55810	513	2,7101174	563	2,7505084
414	70003	464	65180	514	09631	564	12791
415	80481	465	74530	515	18072	565	20484
416	90933	466	83859	516	26497	566	28164
417	2,6201361	467	93169	517	34905	567	35831
418	11763	468	2,6702459	518	43298	568	43483
419	22140	469	11728	519	51674	569	51123
420	32493	470	20979	520	60033	570	58749
421	42821	471	30209	521	68377	571	66361
422	53125	472	39420	522	76705	572	73960
423	63404	473	48611	523	85017	573	81546
424	73659	474	57783	524	93313	574	89119
425	83889	475	66936	525	2,7201593	575	96678
426	94096	476	76070	526	09857	576	2,7604225
427	2,6304279	477	85184	527	18106	577	11758
428	14438	478	94279	528	26339	578	19278
429	24573	479	2,6803355	529	34557	579	26786
430	34685	480	12412	530	42759	580	34280
431	44773	481	21451	531	50945	581	41761
432	54837	482	30470	532	59116	582	49230
433	64879	483	39471	533	67272	583	56686
434	74897	484	48454	534	75413	584	64128
435	84893	485	57417	535	83538	585	71559
436	94865	486	66363	536	91648	586	78976
437	2,6404814	487	75290	537	99743	587	86381
438	14741	488	84198	538	2,7307823	588	93773
439	24645	489	93089	539	15888	589	2,7701153
440	34527	490	2,6901961	540	23938	590	08520
441	44386	491	10815	541	31973	591	15875
442	54223	492	19651	542	39993	592	23217
443	64037	493	28469	543	47998	593	30547
444	73830	494	37269	544	55989	594	37864
445	83600	495	46052	545	63965	595	45170
446	93349	496	54817	546	71926	596	52463
447	2,6503075	497	63564	547	79873	597	59743
448	12780	498	72293	548	87806	598	67012
449	22463	499	81005	549	95723	599	74268

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
600	2,7781513	650	2,8129134	700	2,8450980	750	2,8750613
601	88745	651	35810	701	57180	751	56399
602	95965	652	42476	702	63371	752	62178
603	2,7803173	653	49132	703	69553	753	67950
604	10369	654	55777	704	75727	754	73713
605	17554	655	62413	705	81891	755	79470
606	24726	656	69038	706	88047	756	85218
607	31887	657	75654	707	94194	757	90959
608	39036	658	82259	708	2,8500333	758	96692
609	46173	659	88854	709	06462	759	2,8802418
610	53298	660	95439	710	12583	760	08136
611	60412	661	2,8202015	711	18696	761	13847
612	67514	662	08580	712	24800	762	19550
613	74605	663	15135	713	30895	763	25245
614	81684	664	21681	714	36982	764	30934
615	88751	665	28216	715	43060	765	36614
616	95807	666	34742	716	49130	766	42288
617	2,7902852	667	41258	717	55192	767	47954
618	09885	668	47765	718	61244	768	53612
619	16906	669	54261	719	67289	769	59263
620	23917	670	60748	720	73325	770	64907
621	30916	671	67225	721	79353	771	70544
622	37904	672	73693	722	85372	772	76173
623	44880	673	80151	723	91383	773	81795
624	51846	674	86599	724	97386	774	87410
625	58800	675	93038	725	2,8603380	775	93017
626	65743	676	99467	726	09366	776	98617
627	72675	677	2,8305887	727	15344	777	2,8904210
628	79596	678	12297	728	21314	778	09796
629	86506	679	18698	729	27275	779	15375
630	93405	680	25089	730	33229	780	20946
631	2,8000294	681	31471	731	39174	781	26510
632	07171	682	37844	732	45111	782	32068
633	14037	683	44207	733	51040	783	37618
634	20893	684	50561	734	56961	784	43161
635	27737	685	56906	735	62873	785	48697
636	34571	686	63241	736	68778	786	54225
637	41394	687	69567	737	74675	787	59747
638	48207	688	75884	738	80564	788	65262
639	55009	689	82192	739	86444	789	70770
640	61800	690	88491	740	92317	790	76271
641	68580	691	94780	741	98182	791	81765
642	75350	692	2,8401061	742	2,8704039	792	87252
643	82110	693	07332	743	09888	793	92732
644	88859	694	13595	744	15729	794	98205
645	95597	695	19848	745	21563	795	2,9003671
646	2,8102325	696	26092	746	27388	796	09131
647	09043	697	32328	747	33206	797	14583
648	15750	698	38554	748	39016	798	20029
649	22447	699	44772	749	44818	799	25468

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
800	2,9030900	850	2,9294189	900	2,9542425	950	2,9777236
801	36325	851	99296	901	47248	951	81805
802	41744	852	2,9304396	902	52065	952	86369
803	47155	853	09490	903	56878	953	90929
804	52560	854	14579	904	61684	954	95484
805	57959	855	19661	905	66486	955	2,9800034
806	63350	856	24738	906	71282	956	04579
807	68735	857	29808	907	76073	957	09119
808	74114	858	34873	908	80858	958	13655
809	79485	859	39932	909	85639	959	18186
810	84850	860	44985	910	90414	960	22712
811	90209	861	50032	911	95184	961	27234
812	95560	862	55073	912	99948	962	31751
813	2,9100905	863	60108	913	2,9604708	963	36263
814	06244	864	65137	914	09462	964	40770
815	11576	865	70161	915	14211	965	45273
816	16902	866	75179	916	18955	966	49771
817	22221	867	80191	917	23693	967	54265
818	27533	868	85197	918	28427	968	58754
819	32839	869	90198	919	33155	969	63238
820	38139	870	95193	920	37878	970	67717
821	43432	871	2,9400182	921	42596	971	72192
822	48718	872	05165	922	47309	972	76663
823	53998	873	10142	923	52017	973	81128
824	59272	874	15114	924	56720	974	85590
825	64539	875	20081	925	61417	975	90046
826	69800	876	25041	926	66110	976	94498
827	75055	877	29996	927	70797	977	98946
828	80303	878	34945	928	75480	978	2,9903389
829	85545	879	39889	929	80157	979	07827
830	90781	880	44827	930	84829	980	12261
831	96010	881	49759	931	89497	981	16690
832	2,9201233	882	54686	932	94159	982	21115
833	06450	883	59607	933	98816	983	25535
834	11661	884	64523	934	2,9703469	984	29951
835	16865	885	69433	935	08116	985	34362
836	22063	886	74337	936	12758	986	38769
837	27255	887	79236	937	17396	987	43172
838	32440	888	84130	938	22028	988	47569
839	37620	889	89018	939	26656	989	51963
840	42793	890	93900	940	31279	990	56352
841	47960	891	98777	941	35896	991	60737
842	53121	892	2,9503649	942	40509	992	65117
843	58276	893	08515	943	45117	993	69492
844	63424	894	13375	944	49720	994	73864
845	68567	895	18230	945	54318	995	78231
846	73704	896	23080	946	58911	996	82593
847	78834	897	27924	947	63500	997	86952
848	83959	898	32763	948	68083	998	91305
849	89077	899	37597	949	72662	999	95655

Anhang.

Kurze Geschichte der im Lehrbuche vorkommenden Wissenschaften.

Geschichte der Mathematik im Allgemeinen.

Die eigentlichen Kriegswissenschaften hängen in so fern von den mathematischen Wissenschaften ab, als sie die Principien daraus entlehnen müssen, ohne welche sie nicht als Wissenschaften auftreten können. Es ist daher nöthig, den Ursprung und Fortgang der Mathematik kennen zu lernen, und die besondern Anwendungen ihrer eigenthümlichen Principien auf die Kriegswissenschaften daraus zu erforschen. Da die bessere oder schlechtere Bearbeitung der eigentlichen Kriegswissenschaften von der Bearbeitung und Vervollkommnung der Mathematik herrührt: so ist es nützlich, sich mit dem mathematischen Geiste aller der Jahrhunderte im Allgemeinen bekannt zu machen, in welchen vorhandene Kenntnisse geordnet, verbessert, erweitert, und zu diesen neue erfunden worden sind. Die allgemeine Geschichte der Mathematik muß also der besondern Geschichte der Kriegswissenschaften vorangehen.

Vor andern kleinern und grössern Schriften, fleissigen und wenig brauchbaren Sammlungen, empfiehlt sich als ein allgemeines Hülfsmittel zur Erlernung der Geschichte der Mathematik folgendes Hauptwerk:

Histoire des Mathematiques, dans la quelle on rend compte de leurs progres, depuis leurs origine iusqu'a nos jours; ou l on expose le tableau et le developpement des principales decouvertes, les contestations qu'elles on fait naitre et les principeaux traits de la vie des

Mathematiciens les plus celebres, par Mr. Montucla. — Paris 1758. T. II. 4. mit Kupfern.

Dieses schäzbare und einzige allgemein brauchbare Werk zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, enthält nicht nur Erklärungen der Sachen, sondern die Veranlassungen zu den Erfindungen werden philosophisch in demselben entwikelt. Die Geschichte der Mathematik (bürgerliche Baukunst und Kriegswissenschaften ausgenommen,) geht bis zum Ende des 17ten Jahrhunderts. Ein III. Band sollte die Geschichte des 18ten Jahrhunderts enthalten.

Aus diesem Werke hat der Herr Prof. Scheibel in Breslau in seiner Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis I. Band, Breslau 1765, einen zwekmässigen und das Original an manchen Orten verbessernden Auszug gemacht. Ausser diesem findet man einen kurzen aber sehr brauchbaren Abris der Geschichte der Mathematik in des Herrn Prof. Walds Versuch einer Einleitung in die Geschichte der Kenntnisse, Wissenschaften und schönen Künste. Halle 1784.

Hier können nur Winke aus den genannten Schriften zum Studium der Geschichte der gesammten mathematischen Wissenschaften, und im Folgenden die wichtigsten Nachrichten von der Entstehung, Bearbeitung und Vervollkommnung einzelner Wissenschaften gegeben werden, weil eine ausführlichere Geschichte die Gränzen eines Lehrbuches der gesammten Kriegswissenschaften überschreiten würde.

Nach dem Montucla hat man 5 Perioden in der Geschichte der Mathematik, die bis auf das Ende des 17ten Jahrhunderts gehen.

Erste Periode.

Vom Ursprunge mathematischer Kenntnisse bis auf das erste System der Geometrie, ohngefähr 300 Jahr vor Christi Geburt.

Den Ursprung mathematischer Kenntnisse haben wir der Natur und dem Zufalle, vorzüglich aber den Bedürfnissen und der dringendsten Noth zu danken. Dies beweist die Geschichte aller Jahrhunderte.

Bei

Bei den Bewohnern um Babylon, insgemein Chaldäern, findet man die ersten mathematischen, besonders aber die ersten astronomischen und astrologischen Kenntnisse; in Aegypten praktisch-geometrische unter Sesostris; einige astronomische und physikalische Kenntnisse, verbunden mit der natürlichen Geometrie, bei den Priestern in Aegypten, welche sie aber geheim hielten.

Das Sonnenjahr der Aegyptier hatte 360, bald nachher aber wurde es von den ägyptischen Thebanern auf 365 Tage gesezt. Vermuthlich ist dieses die erste Veranlassung, die Peripherie des Kreises in 360 gleiche Theile zu theilen. Das mechanische der Schiffsbau- und Steuermannskunst rührt von den Phönizier her. Die Juden, von welchen die Geschichte der Mathematik wenig weis, hatten wahrscheinlich einige architektonische, mechanische, astronomische und gnomonische Einsichten. Ihre wichtigsten Kunstwerke wurden iedoch von fremden Baumeistern in spätern Zeiten gebaut. Aegypten und Babylon kann man in dieser Periode als die Schule der Mathematik betrachten.

Thales und Pythagoras aus Griechenland legten den Grund zu ihren mathematischen Kenntnissen in diesen Ländern, übertrafen aber in der Folge ihre Lehrer. Thales zeigte astronomische, geographische und gnomonische Einsichten, und legte den Grund zur wahren Geometrie in Griechenland. Sein Schüler Anaximander erfand die Landcharten und lehrte zuerst die Geometrie öffentlich.

Ausser diesen blühten dazumal in Griechenland Anaxagoras, Hekatäus, Meton und Euktemon. Die sokratische Schule schenkte der Mathematik einen Plato. Nikomedes, Apollonius, Aristäus und Aristoteles sind nicht weniger berühmt. Aeneas bearbeitete die Taktik. In Latium zeigte Papyrius astronomische, chronologische und gnomonische Kenntnisse.

Die Indianer und Sinesen legen sich in diesem Zeitraume hohe mathematische Einsichten bei, deren Gewisheit aber nicht bewiesen werden kann.

Zweite Periode.
Bis auf Christi Geburt.

In diesem Zeitraume häufen sich die mathematischen Kenntnisse unter den Griechen. Durch Alexandern den Grossen wurden richtige mathematische Kenntnisse in Aegypten und dem Morgenlande verbreitet. In der Schule zu Alexandrien in Aegypten wurden die wichtigsten Mathematiker gebildet.

Euklides schrieb hier das erste System der Geometrie, durch welches richtige Kenntnisse und eine mustervolle Methode verbreitet wurden. Optik und Musik bearbeitete derselbe ebenfalls.

Ktesibius, Timocharis, Aristyllus und Aristarchus trugen ebenfalls das Ihrige zur Verbesserung und Verbreitung mathematischer Kenntnisse bei.

Heron war berühmt als Mechaniker.

Archimedes bearbeitete mehrere Lehren der niedern und höhern Geometrie, und legte den Grund zur Mechanik, Statik und Hydrostatik. Sein Geist, mit welchem er in die mathematische Kenntnis eindrang, und sein Ausdauern in mühsamen Aufsuchungen und sinnreichen Erfindungen ist das erste Muster der Mathematiker. Er vertheidigte seine Vaterstadt Syrakus gegen den Römer Marcellus. Die Erfindung seiner grossen Brennspiegel ist Zweifeln unterworfen. Athenäus schrieb von den Kriegswerkzeugen, und späterhin Philo von Kriegsmaschinen. Eratosthenes, Apollonius, Konon, Hipparch, Theodosius und Hermogenes bearbeiteten ebenfalls mit vielem Ruhme mehrere Theile der Mathematik. Polybius schrieb seine Kriegsgeschichte.

Die Griechen hatten in diesem Zeitraume Arithmetik, niedere Geometrie, Optik und Astronomie in Systemen; allgemeine Grundsäze der Mechanik und Statik, architektonische, katoptrische, hydrostatische und höhere geometrische, auch kriegswissenschaftliche Kenntnisse.

Die Römer bearbeiteten, von den Griechen und Aegyptiern erlernt, die Mechanik, bürgerliche und Kriegsbaukunst. Julius Cäsar, Sosigenes, Vitruv, Dionysius

nysius aus Halikarnas und Strabo sind die merkwürdigsten.

Dritte Periode.

Bis auf den Untergang der Schule zu Alexandrien, im Jahre nach Christi Geburt 641.

In dieser Periode gab es wenig originelle Mathematiker. Ein ganzes Heer von Kommentatoren und Sophisten, und unnüzes Gezänk über dogmatische Subtilitäten, verdrängten alle gründliche und gemeinnüzige Gelehrsamkeit unter den Griechen. In Italien hinderten Befehle der Kaiser, die Einfälle barbarischer Völker, und die wenige Aufmunterung und Unterstüzung die Aufnahme der mathematischen Wissenschaften.

Menelaus, Perseus, Philo waren Erfinder.

Onosander schrieb eine Anleitung zur Taktik.

Ptolemäus legte in seiner Geographie den geometrischen Grund zur Verfertigung der Landcharten. Diophantus trug die Grundsäze der Algebra vor.

Nikomachus schrieb die erste allgemeine Einleitung in die Mathematik. Pappus, Theon und Proklus kommentirten über den Euklides; Hypatia, Theons Tochter, über den Apollonius und Diophantus. Pappus mathematische Sammlungen zeugen von seinen grossen Einsichten in die Geometrie und sind in der Geschichte der Mathematik unentbehrlich, besonders weil er zeigt, auf welche Art die Alten ihre Untersuchungen anstellten. Diokles und Isiodorus bearbeiteten die höhere Geometrie. Proklus hielt durch seinen Unterricht in Athen den gänzlichen Verfall der Mathematik auf.

Josephus aus Jerusalem schrieb vom iüdischen Kriege; Julius Frontinus von den Stratagemen; Flavius Arrianus von der Anordnung der Schlacht; vom Kriege 2c.

Seneka der ältere handelt von den Kometen besser als vor ihm, und Frontin war ein guter Wasserbaumeister und Taktiker. Doch gab es in diesem Zeitraume keine Euklides, Archimedes, Plato 2c., lauter mittelmässige Mathematiker.

Vierte Periode.

Bis auf den Untergang des griechischen Kaiserthums, im Jahr nach Christi Geburt 1453.

Alexandria wurde 641 von den Arabern erobert, und dadurch der griechischen Gelehrsamkeit ein Ende gemacht. Der Khalife **Omar** ließ die dortige unschäzbare Bibliothek verbrennen. Dies war das Ende der alexandrinischen Schule, die sich fast durch Jahrtausende um die Wissenschaften verdient gemacht hatte.

Mit dem Untergange dieser Schule geht bei den Griechen die Mathematik unwiederbringlich verloren, findet aber bei den sonst rohen und kriegerischen Arabern und Persern Aufnahme.

Die Araber wurden nun die Lehrer Europens und verpflanzten die Mathematik über Spanien nach Frankreich, Deutschland und Italien.

Einige Originalköpfe in Deutschland und Britannien erwarben sich auch ohne arabischen Unterricht für ihre Zeiten grosse mathematische Einsichten.

Vertheidigungskunst und Taktik wurden, wegen der Einfälle wilder Völker, den Griechischen Vertheidigern im Orient immer nöthiger. K. Leo IV. errichtete eine mathematische Schule in Konstantinopel und schrieb selbst ein taktisches Werk.

Heron der Jüngere schrieb eine Geodäsie, ein Werk über die Kriegsmaschinen, und ein anderes über die Vertheidigung einer belagerten Stadt.

Als die Araber in Ruhe kamen: so beförderten auch ihre Fürsten **Almansur**, **Harun al Raschid**, **Almann**, die Aufnahme der Wissenschaften, errichteten zu Bagdad eine astronomische Schule und holten von den Griechen und Indianern arithmetische und andre mathematische Kenntnisse.

Die Araber haben entschiedene Verdienste um die Arithmetik, niedere und höhere Geometrie, Astronomie und Algebra, die auch von ihnen den Namen erhalten haben soll.

Die **Perser** erwarben sich in diesem Zeitraume auch einige mathematische, besonders chronologische Kenntnisse.

Die tartarischen Eroberer, Jlekhan ꝛc. vorzüglich Ulugh-Beg erwarben sich um die Astronomie entschiedene Verdienste. Die Sinesen sollen ihnen einen grossen Theil ihrer Kenntnisse schuldig sein.

Unter den Deutschen, Franzosen und Engländern wirkten einige Gelehrte im Stillen. Dem deutschen Forschungsgeiste entging weniger von den arabischen Kenntnissen als andern Nationen. Gerbert, Campanus und Gioia zeichnen sich vorzüglich unter den Europäern aus. Jm 13ten Jahrhunderte wuchsen unter den Deutschen, Britten, Franzosen und Spaniern die mathematischen Kenntnisse durch den Einflus der Araber.

Kaiser Friedrich II. und König Alphonsus von Castilien haben zur Erweiterung dieser Kenntnisse unbezweifelt gewirkt.

Albert Groot, Vitello, Pekham und Roger Bakon besassen viele mathematische Kenntnisse.

Fünfte Periode.

Bis auf Christian Freiherrn von Wolf, oder bis um die Hälfte des 18ten Jahrhunderts.

Die aus Griechenland nach Jtalien, und von da aus nach Deutschland, Frankreich und England verpflanzten humanistischen Kenntnisse; der Forschungsgeist der Scholastiker; die freiere Denkungsart; die errichteten und verbesserten Schulen und Universitäten; die Erfindung der Buchdrukerkunst; die Unterstüzung grosser Herren, und die Geneigtheit der Deutschen und Britten zum mathematischen Phlegma — sind Hauptursachen der grossen Fortschritte der Mathematik in diesem Zeitraume.

Die Deutschen haben sich durch 3 Jahrhunderte als die größten Astronomen, Geometer ꝛc. erhalten. Die Franzosen haben kostbarere Beobachtungen angestellt als die Deutschen, weil die leztern wenige große, und für Wissenschaften wohlthätige Unterstüzer gehabt haben.

Vorzüglich ist in diesem Zeitraume die angewandte Mathematik glüklich bearbeitet worden. Noch nicht in Systeme gebrachte Kenntnisse wurden systematisch bearbeitet und alle

Theile

Theile der angewandten Mathematik mit Berichtigungen bereichert.

Im 15ten Jahrhunderte wurde die Perspektive in ein System gebracht, die Algebra auf die Geometrie angewandt; jedoch hinderte der damalige Zustand der Physik das schnelle Wachsthum der angewandten Mathematik.

Infant Heinrich in Portugall, Leonhard von Pisa, Regimontan aus Schwaben, Peter von Ailly, de Cusa und Purbach ꝛc. sind die merkwürdigsten Mathematiker dieses Jahrhunderts.

Vallo und Alb. Dürer verbesserten die Kriegsbaukunst.

Im 16ten Jahrhunderte bearbeiteten die Deutschen vorzüglich Geometrie und Astronomie. Byrgius, Wilhelm IV. Landgraf zu Hessen, Ludolph von Ceuln, Vieta, Metius, Reinhold, der zuerst über die Markscheidekunst schrieb, Münster, Kopernikus und Fleischer zeichnen sich vorzüglich aus.

Nic. Tartaglia verbesserte unter andern die Kriegsbaukunst. Marchi erfand die italiänische Befestigungsmanier, worüber Spekle am besten geschrieben hat. Einige Deutsche, Preussische und Niederländische Ingenieurs, besonders Freitag ersannen die holländische Manier bei Gelegenheit der Kriege, in welchen die Holländer mit den Spaniern um bürgerliche und Religionsfreiheit stritten.

Im 17ten Jahrhunderte lebten viele grosse und wichtige Mathematiker, welche die Optik, Mechanik und Astronomie mit wichtigen Erfindungen bereichert haben. Neue Theile der Mathematik wurden entdekt — andere in wissenschaftliche Form gebracht und die gesammte Mathematik von den Franzosen zuerst in cursibus vorgetragen.

Die Arithmetik, Geometrie und Analysis ist von Stiefel, Neper, Bernegger, Brigg, Blacq, Keppler, Kavaleri, Kortes, Roberval, Galiläi, Wallis, Gunter, die Bernoullis, Poscal, Witt, Newton und Leibnitz bearbeitet, und mit vielen neuen Erfindungen bereichert worden.

Die optischen Wissenschaften, haben Ubaldi, Keppler, Drebbel, Rheita, Kircher, Gregor, New-

Newton, Römer, Snellius, Kortes, Fermat, Tschirnhausen und Huygens verbessert.

Die mechanischen Wissenschaften wurden von Stevin und Varignon, Huygen, Wren, Wallis, die Bernoullis, Newton und Kortes bearbeitet.

Die astronomischen Wissenschaften fanden einen Kepler, Huygen, Cassini, Shakerley, Halley, Hevel, Hook und Klavius.

Die bürgerliche Baukunst wurde durch Albertis, Palladio, Serlio, und durch das Studium des Vitruvs, den Rivius ins Deutsche und nach ihm Perrault ins Französische übersezte, zu einem hohen Grade der Vollkommenheit und von Goldmann in ein System gebracht, welches Sturm verbesserte.

Renau legte den Grund zur Theorie der Schiffsbaukunst.

Die Kriegsbaukunst ward von Pagan, Rimpler, Schildknecht rc. verbessert. Vauban vereinigte alte und neue Manieren und verfertigte daraus ein neues System. Vieles was Vauban zugeschrieben wird, rührt nicht von ihm her. Glaser u. a. verbesserten die Fehler der vaubanschen Methode.

Der Gebrauch des Pulvers schuf unsere Artillerie. Dulacq und Robins erwarben sich um die ganze Artillerie, so wie Belidor und Blondel um das Bombenwerfen grosse Verdienste.

Zu Anfange des 18ten Jahrhunderts wurde die Mathematik in einem Theile von Frankreich, Italien und Rußland, aber allgemein in England und Deutschland öffentlich gelehrt.

Sechste Periode.

Bis auf unsere Zeiten.

Wolf hat sich unstreitig das Verdienst erworben, daß man von ihm eine neue Periode in der Geschichte der Mathematik anfangen kann. Er erregte durch seine Schriften, in welchen Ordnung und Deutlichkeit herrscht, und durch seinen mündlichen Vortrag, allgemeine Liebe und Achtung für das mathe-

matische Studium, stellte die Aerometrie als Wissenschaft auf und bearbeitete die mehrsten Theile der Mathematik. Kästner hat sich das Prädikat des allgemeinen Lehrers der Mathematik in Deutschland erworben.

Die Astronomie wurde durch Eulern, Messier, Clairaut, Tob. Mayer, Hell, de la Lande, de la Caille, Wargentin, Boskowich rc. mit neuen Entdekungen bereichert. Im lezten Jahrzehend entdekte Herschel den Uranus und nimmt fast unglaubliche Verbesserungen mit den Fernröhren vor. Bode verbreitet ausser gelehrten auch gemeinnüzige Kenntnisse der Astronomie.

Die mathematische Geographie hat durch die Akademien der Wissenschaften in Paris, Berlin, Stokholm, so wie durch die kosmographische Gesellschaft zu Nürnberg viel gewonnen.

Alle optische und perspektivische Entdekungen hat Roi in Rechnung gebracht.

Leonhard Euler faßte alles menschliche Wissen in der Mathematik zusammen und bearbeitete beinah alle mathematische Wissenschaften. Auch nach seinem Tode erscheinen noch viele gelehrte Abhandlungen in den Schriften der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg.

v. Segner und Karsten, beide Wolfs grosse Nachfolger lehreten mündlich und in ihren Schriften den größten Theil der mathematischen Wissenschaften mit unsterblichem Ruhme. Struensee bearbeitete die Artillerie und trug die brauchbarsten Kenntnisse der Befestigungs- und Verschanzungskunst zusammen.

La Grange, Mönnich, Langsdorf, Klügel, Scheibel, Hindenburg, rc. haben durch ihre Schriften und mündliche Unterweisung schon vieles geleistet und die Zukunft hat noch mehreres von denselben zu erwarten.

In den neuesten Zeiten wurde das Studium der Mathematik sehr vernachlässiget, wovon mehrere Ursachen anzugeben wären. Jezt scheint es sich wieder zu heben. Die niedern Schulen sind zum Theil noch zu sehr zurüke. Das Militär findet noch zu viel Gefallen an encyklopädischen Kenntnissen der Mathematik. v. Tempelhof, Rösch, Miller, Hahn, Böhm, Jetze, Schleicher,

Scharn-

Scharnhorst u. a. suchen gründliche mathematische Kenntnisse mehr zu verbreiten. Die besondern Theile der Kriegskunst erheben sich in diesem Jahrhunderte zu Wissenschaften, wenn grosse Beförderer und Unterstüzer die Bearbeiter derselben nicht sinken lassen.

Quellen und Hülfsmittel zum Studium der Geschichte der Mathematik sind in Walds Versuch einer Einleitung ꝛc. angegeben.

Geschichte der Arithmetik insbesondere.

Fast alle Nachrichten stimmen darin überein, daß die Arithmetik von den Phöniciern herrühren soll. Ihr Handel, der bedeutender war, als bei den übrigen Nationen, machte ihnen Arithmetik nothwendig. Indes waren gewis vor den Phöniciern die ersten Begriffe vom Rechnen vorhanden, weil es nicht leicht ein Volk giebt, welches bei seinen Bedürfnissen, die noch so gering sein können, alles Rechnen entbehren kann. Porphyrius sagt, im Leben des Pythagoras, daß die Phönicier in alten Zeiten auf Zahlen und Rechnungen Fleis verwandt haben, und Strabo in seiner Geographie giebt dies von den Phöniciern als eine zu seiner Zeit bekannte Meinung an.

Die Fabel macht Phönix, Theut, so wie Josephus den Abraham zum ältesten Rechenmeister.

Das Zählen bis auf Zehen, oder nach der Dekadik ist wohl die älteste Art zu rechnen, weil man wahrscheinlich zuerst an den Fingern zählte, so wie es iezt noch von Ungeübten geschieht, und welches auch neuere Reisebeschreiber von noch unkultivirten Nationen berichten. Die Zehner konnten durch andere Zeichen bezeichnet, oder auf eine andere Art bemerkt werden. — Kurz, iede andere Art zu zählen würde den ersten Erfindern schwerer geworden sein, als diese.

Die Phönicier bedienten sich zuerst der Buchstaben ihres Alphabets, als kurzer Zeichen der Zahlen. Die ersten 10 dienten die Einer anzuzeigen, die übrigen aber drükten die höhere Ordnungen aus.

Die Griechen haben die Zahlen ebenfalls mit Buchstaben, und zwar auf folgende Art bezeichnet: *)

Figur der Buchstaben.	Namen.	Bedeutung.	Zahlen.
α	alpha	a	1
β	béta	b	2
γ	gamma	g	3
δ	delta	d	4
ε	epsilon	e	5
			(ϛ) 6
ζ	zéta	z	7
η	eta	é	8
ϑ	théta	th	9
ι	iota	i	10
κ	kappa	k	20
λ	lamda	l	30
μ	my	m	40
ν	ny	n	50
ξ	xi	x	60
ο	omicron	o	70
π	pi	p	80
			(ϛ', οι) 90
ρ	rho	r	100
σ	sigma	s	200
τ	tau	t	300
υ	ypsilon	y	400
φ	phi	ph	500
χ	chi	ch	600
ψ	psi	ps	700
ω	oméga	o	800

Auf eine ähnliche Art bedienten sich die Hebräer der Buchstaben ihres Alphabets um Zahlenbegriffe zu bezeichnen.

Die Lateiner hatten eine Methode, die Zahlen nur mit 5 Buchstaben, nämlich I, V, X, L, C anzuzeigen, wie in der Arithmetik selbst bemerkt worden ist. In der lateinischen

*) Das griechische Alphabet ist um deswillen ganz hieher gesezt, weil einzelne Buchstaben zur Bezeichnung geometrischer Figuren in der Folge gebraucht werden, welches die Namen derselben für Nichtkenner der griechischen Sprache nöthig macht.

schen Zahlenschrift ist die Progression, deren Exponent 5 ist, mit einer andern Progression verbunden, die 10 zum Exponenten hat, und die Zeichen bekommen in manchen Fällen einen besondern Werth von der Stelle, welche sie einnehmen, aber nach ganz verschiedenen Gründen, als nach der Dekadik.

Im Aussprechen der Zahlen waren die Alten von uns ganz verschieden.

Die Griechen bezeichneten die höhern Ordnungen durch Myriade, anstatt 10000. Archimedes nennt eine Myriade von einer Myriade eine Einheit der ersten Periode; eine Myriade solcher Einheiten eine Einheit der zweiten Periode ꝛc.

Die ältern Römer scheinen über Hunderttausend nicht viel gezählt zu haben. Doch findet man im Vitruv auch nach unserer iezigen Art gezählt.

Von den Hülfsmitteln, deren sich die Alten bedienten, mit sehr hohen Zahlen zu rechnen, ist uns wenig gewis bekannt.

Beim Archimedes und Ptolemäus findet man Beispiele, welche Mühe es verursachte, mit grossen Zahlen zu rechnen, und welche Vorzüge daher unsere Arithmetik vor der, der Alten hat.

In einem Manuskripte des Boethius de geometria, welches in Altorf befindlich sein soll, wird erzählt, daß einige der ältern Pythagoräer nur 9 Charaktere gebraucht hätten, um alle Zahlen und Rechnungen anzusezen.

Pythagoras, aus Samos oder Sidon, geb. 590. v. Ch. G. und seine Nachfolger haben unstreitig der Arithmetik die erste wissenschaftliche Form gegeben. Ihre Hauptbeschäftigung betraf indessen die Eigenschaften und Verhältnisse der Zahlen, besonders solche, welche durch die Stellung der Einheiten, woraus eine Zahl besteht, eine gewisse geometrische Figur geben. Daher Trigonal- Polygonal- und Pyramidalzahlen. Verglichen mit §. 146. Ferner untersuchten sie die vollkommenen und unvollkommenen Zahlen, so wie Pythagoras vermuthlich durch die Kombinationen solcher Zahlen z. B. 3, 4, 5 auf einen der wichtigsten Lehrsäze der Geometrie gekommen ist.

Archytas schrieb ein Buch von der 10.

Thelauges, des Pythagoras Sohn, 4 Bücher über die Zahl 4.

Im 7ten, 8ten und 9ten Buche der Elemente des Euklides, der ohngefähr 272 Jahr v. Ch. G. zu Alexandrien lebte, sind die allgemeinen Säze von den Zahlen, besonders von den Primzahlen, zusammengesezten, geraden und ungeraden, und von den Proportionalzahlen enthalten. Die Rechnungsoperationen werden vorausgesezt. Sie sind ein Meisterstük tiefdurchdachter und abstrakter Schlüsse, und einem ieden zu empfehlen, der sich durch Uebungen der gemeinen und allgemeinen Arithmetik zum Abstrahiren vorbereitet hat.

Ptolemäus, eben aus Alexandrien, führte zum Behuf der Astronomie die Sexagesimalrechnung ein. Die Sexagesimalbrüche sind von den übrigen Brüchen darin unterschieden, daß sie keine andern Nenner als 60, oder ein Produkt von 60 mit sich selbst haben. Da sie den Astronom aber nur vorzüglich wegen der Eintheilung des Kraises und anderer kraisähnlicher Linien in 60 gleiche Theile, interessiren; so sind sie in diesem Lehrbuche übergangen worden.

Terrentius Varro Arithmetik, vermuthlich die erste bei den Lateinern, soll nach Heibronner ungedrukt in einer römischen Bibliothek liegen. Nikomachus Einleitung in die Arithm. ist in Paris 1538 gedrukt.

Der in §. 18. angeführte Gerbert brachte unsere Arithmetik aus Spanien, wohin er um das Jahr 970 aus dem Kloster Fleury aus Wisbegierde floh. Die bekannten neun Zahlzeichen und Null rühren ebenfalls von den Arabern her. Man ist beinahe einstimmig die Erfindung unserer Arithmetik nebst den Zahlzeichen, den Indianern zuzuschreiben. Montükla führt folgende Gründe für den indianischen Ursprung der Arithmetik an.

1. Sehr viele arabische Handschriften haben den Titel, daß sie von der indianischen Rechnungsart handeln.
2. Alsephadi in seiner Auslegung eines berühmten arabischen Gedichts des Tograi sagt, die Indianer rühmten sich dreier Dinge, eines Fabelbuches, ihrer Rechnungsart und des Schachspiels. Aben Ragel aus dem 13ten Jahrhundert behauptet eben dieses.
3. Der Mönch Planudes aus dem 13ten Jahrhundert redet ebenfalls von der indianischen Rechenkunst, von den

9 indianischen Charakteren, und von der Null. o nennt er τζιφρα (Ziffer) welches von Tzephera, (vacuus, inanis fuit, es ist leer, es gilt nichts) herkommt.

4. Wie sie bei uns im 13ten Jahrhundert eingeführt ward, so zweifelte man gar nicht daran, daß sie von den Indianern herrühre.

Vossius glaubt, die Indianer hätten sie von den Arabern, und diese von den Griechen.

Obgleich in einigen griechischen Handschriften Charaktere vorkommen, die den unsrigen gleichen: so giebt dies noch keinen Beweis, daß die Griechen die Erfinder sein müßten, weil sie von Abschreibern in spätern Zeiten untergeschoben sein können. Man pflegt den Ursprung der Zahlzeichen aus einem Quadrate herzuleiten, das mit seinen Diagonalen durchschnitten ist. Andere sezen die Zahlzeichen aus so viel einzelnen Strichen zusammen, als das Zahlzeichen Einheiten anzeigen soll.

Von der Fingerrechenkunst oder Daktylonomie findet man Nachricht in Leupolds Theatrum Arithmetico-Geometricum, d. i. Schauplaz der Rechen- und Meßkunst. Leipzig 1727.

Im 14ten Jahrhundert schrieb Barlaam der Mönch eine Arithmetik, die zu Paris 1600 herausgekommen, worin alle Operationen der praktischen Rechenkunst sorgfältig demonstrirt sind.

Im 15ten Jahrhundert gab Lukas Paciolus oder de Burgo Sti sepulchri zu Venedig summam arithmeticae et geometriae proportionumque et proportionalitatum 1494. heraus, worin zuerst alle Operationen der Arithmetik auf 7 gebracht sind.

Im 17ten Jahrhundert erschien Guil. Budaei Arithm. Memorativa, versibus conscripta. Der Verfasser starb 1550 und sein Buch ist 1631 herausgekommen. Es enthält die Regeln, die Quadratwurzeln unvollkommener Quadrate bis auf $\frac{1}{1000}$ zu finden 2c. in lateinischen Versen und ohne Beweise. Die Erfindung und Berechnung der Logarithmen ist §. 177. erwähnt. Noch ist zu merken Adam Riesens Rechnung nach der Länge auf der Linien, (d. i. mit calculis (Rechenpfennigen)) und Feder. Leipzig 1550.

Man findet davon mehr Nachricht und Beispiele von Rechnungen dieser Art in Leupolds Theatrum. C. V. p. 9 etc.

Bayers Logistica decimalis. Francof. 1619. ist als ein deutliches und ausführliches Werk über die Substitution der Decimalbrüche und ihrer Berechnung statt der gemeinen und besonders der Decimalbrüche zu merken. *Tacquets* Theoria et praxis Arithmetices von 1659 und 1683 ist auch wegen der euklideischen Arithmetik merkwürdig, die er zum Theil erläutert hat. Ludolph gab 1690 eine Tetragonometria Tabularia heraus, worin die Quadrate aller Wurzeln bis auf 100000, Quadrate und Würfel der Wurzeln bis 10000 enthalten sind.

Ausser den im §. 177. angeführten Tafeln, welche die Quadrat- und Kubiktafeln enthalten, wäre noch zu merken: Joh. Paul Büchners Tabula radicum, quadrator. et cubor. welche die Quadrat- und Kubikzahlen bis auf die Wurzel 12000 enthält, die aber ohne Verbesserung der darin befindlichen Drukfehler nicht zu empfehlen sind.

Noch sind die Methoden, mechanisch oder durch Hülfe vortheilhaft eingerichteter Instrumente oder Maschinen zu rechnen, zu erwähnen übrig. Hierher gehören die in §. 34. erwähnten Nepperschen Stäbchen; das chinesische Recheninstrument, welches aus einer mit Drahtsaiten bespannten Tafel besteht, worauf Rechnungen durch Hülfe beweglicher Kügelchen oder Korallen durchgeführet werden können; die römische Rechentafel ist von jenem Instrumente nur theilweise verschieden; die Rechenscheibe eines Franzosen; Kaspar Schotts Rechenkästchen; die Leupoldische Rechenmaschine; Poleni Rechenmaschine; die Rechenmaschine des Herrn von Leibnitz. Diese und andere findet man abgebildet und beschrieben, nebst zwekmässigem Unterrichte, in Leupolds Theatrum. Von der neuesten Rechenmaschine des Fürstl. Hessen-Darmstädt. Ingenierhauptmann Müllers findet man Nachricht in der Beschreibung seiner neu erfundenen Rechenmaschine. Herausgegeben von Ph. E. Klipstein. Frankf. u. Mainz 1786. Die Rechnung auf der Linie vermittelst des Handzirkels, gehört in die praktische Geometrie.

Aristoteles bemerkt schon Probl. Sect. XV. 3. daß es willkührlich sei, iede 10 niedrige Einheiten eine höhere gelten zu lassen, und führt die thracische Nation an, die nur bis 4 zählte. Dies veranlaßte Weigeln 1672 eine Tetraktik bekannt

bekannt zu machen, die aber wenig Vortheile verspricht. Auf Veranlassung eines chinesischen Buches entwarf Leibnitz seine Dyadik. Aus den chinesischen Charakteren — — machte Leibnitz 1 und 0, und drükte unsere Zahlen auf folgende Art aus:

1	=	1
10	=	2
11	=	3
100	=	4
101	=	5
110	=	6
111	=	7
1000	=	8 etc.

In der in §. 19. angeführten Anweisung zur Dyadik von Brander findet man vollständigere Nachricht.

Mönnich im Anhange seines Lehrbuchs führt die hier ins Kurze zusammengezogene Geschichte vollständiger aus.

Die von der Dekadik verschiedene Zahlensysteme veranlaßten mehrere, neue Zahlensysteme zu entwerfen, welche von den angeführten noch verschieden waren.

Von der Natur der Zahlensysteme kann man sich aus folgender allgemeinen Form eine Idee machen, die ein ieder nach Gefallen ausführen kann.

Es sei

$$hx^n \ldots dx^{+3}, cx^{+2}, bx^{+1}, ax^0, bx^{-1}, cx^{-2}, dx^{-3} \ldots hx^{-n}$$

kürzer:

$$\overset{+n}{h} \ldots \overset{+3}{d}, \overset{+2}{c}, \overset{+1}{b}, \overset{0}{a}, \overset{-1}{b}, \overset{-2}{c}, \overset{-3}{d}, \ldots \overset{-n}{h}$$

Jede dieser Reihen heißt, eine allgemeine Zahlenreihe, und die erste Form entsteht, indem man eine unbekannte Grösse x, nach der Ordnung wie die positiven und negativen Exponenten von Null an zu beiden Seiten auf einander folgen, in ihre verschiedenen Potenzen erhebt, und solche mit unbestimmten einfachen Grössen, a, b, c etc. multiplicirt.

In der zweiten Form bedeuten daher die Buchstaben a, b, c, d etc. die Anzahl der Einheiten bei ieder Potenz der gemeinschaftlichen Grösse x; die überschriebenen Zahlen aber zeigen die Exponenten dieser Potenzen, oder die Ordnungen sol-

solcher Einheiten an; und zwar die positiven die höhern, die negativen die niedern Ordnungen.

Giebt man nun der gemeinschaftlichen Grösse x einen bestimmten Werth: so entsteht daraus, je nachdem dieser Werth verschieden ist, auch ein verschiedenes Zahlensystem; und der jedesmalige Werth der gemeinschaftlichen Grösse x, heißt alsdenn die Basis dieses Systems. So giebt x = 2, die Dyadik; x = 4, die Tetraktik; x = 10, die Dekadik oder das Decimalsystem; x = 12, die Dodekadik oder das Duodecimalsystem; x = 60, das Sexagesimalsystem ꝛc. Verglichen mit §. 116. **) und §. 174.

Diese Entwikelung des Decimal- und Sexagesimalsystems findet man in den Elementen der Mathematik, von Joh. Friedrich Lorenz. Leipzig 1785. Auf eine etwas andere Art in Mönnichs Lehrbuche der Mathematik §. 127. ꝛc.

Hausen hat diese Systeme zuerst aus der Lehre von den negativen Exponenten in der Algebra hergeleitet, in seinem Buche: Elementa matheseos. Leipzig 1734. p. 28. u. f. Der Engländer Wallis gab die erste Idee dazu.

Mehrere Nachrichten von der allgemeinen Arithmetik können am schiklichsten mit den historischen und litterarischen Bemerkungen über die Algebra verbunden werden, die in der folgenden Abtheilung dieses Lehrbuches abgehandelt werden wird.

Als Hülfsmittel zum Studium der Geschichte der Arithmetik kann man ausser dem Montükla noch folgende Schriften benuzen:

Versuch einer mathematischen Historie. Erster Theil, welcher unter andern die Historie der Rechenkunst enthält. Verfertiget von Joh. Christoph Heilbronner. Ulm 1739. Eben desselben Verfassers grösseres Werk ist in Leipzig 1742 unter dem Titel herausgekommen: Historia Matheseos vniversae etc. Accedit Recensio Elementorum, Compendiorum et Operum mathematicum atque Historia Arithmetices ad nostra tempora.

Beide beurtheilt Herr Prof. Scheibel in seiner Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis.

Den Fortgang in der Bearbeitung arithmetischer Wahrheiten findet man in den neuern Lehrbüchern der mathematischen

schen Wissenschaften, worunter sich die von Wolf, von Segner, Kästner, Karsten, Mönnich, Hahn ꝛc. vor andern empfehlen.

Eins der brauchbarsten Lehrbücher der practischen Arithmetik ist F. C. L. Karstens Rechenkunst. 1775.

Schriften, welche von den Lebensumständen berühmter Mathematiker handeln, findet man in der oben angeführten Einleitung von Wald.

Mit diesen kann man verbinden: Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der berühmtesten Mathematiker. Erster Theil, welcher die bis jezt bereits Verstorbenen enthält. Münster 1788. Obgleich in diesem Buche mehrere nicht ganz unwichtige Mathematiker fehlen und von manchen nur ganz kurze Nachrichten gegeben sind: so ist es doch iedem Liebhaber der Geschichte der Mathematik zu empfehlen.

Das Studium der Lebensumstände der Mathematiker kann von grossem Nuzen sein, wenn man auf alle Umstände Achtung giebt, die zu wichtigen Erfindungen Gelegenheit gegeben haben.

Gewisse Lebensverhältnisse machen bald diese, bald iene mathematische Wissenschaft nothwendig — äusserst interessant müßte es daher sein, wenn ieder Mathematiker seine eigenen Ideen, den Gang derselben, und die Mittel anzeigte, wodurch diese oder iene Erfindung bei ihm möglich und wirklich geworden wäre.

Halle,
gedrukt mit Grunertschen Schriften.

Nachricht an den Buchbinder.

Der Bogen, welcher auf der ersten Seite den Schmutztitel: Tafel der Quadrat- und Kubikzahlen ꝛc. hat, wird nach Seite 312., auf welcher sich unten der Kustos: Tafel befindet, eingebunden, so daß also nach dem Bogen der Tafeln die Seitenzahl 313. fortgeht. — Zugleich ist zu erinnern, daß von dem Buche selbst nicht viel abgeschnitten wird, damit auf dem erwähnten Bogen der Raum nicht zu klein wird.